18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Sechzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1862.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des sechzigsten Bandes.

Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. Opus posthumum auctore *C. G. J. Jacobi*. . . . . Seite 1

Ueber die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. Von Herrn *R. Hoppe*. . . . . — 182

Note sur les cubiques gauches. Par M. *L. Cremona* à Bologne. . . . . — 188

Ueber das *Pfaff*sche Problem. Erste Abhandlung. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 193

Die *Laméschen* Functionen verschiedener Ordnungen. Von Herrn *E. Heine* in Halle. . . . . — 252

Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques, extrait d'une lettre de M. *Hermite* à l'éditeur. . . . . — 304

Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten. Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg. . . . . — 305

Sur les surfaces gauches du troisième degré. Par M. *L. Cremona* à Bologne. — 313

Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale. Von Herrn *Mehler* zu Fraustadt. . . . . — 321

Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 343

Sur une formule relative à la théorie des nombres. Par M. *Emile Mathieu* à Paris. . . . . — 351

Tables des formes quadratiques binaires pour les déterminants négatifs depuis $D = -1$ jusqu'à $D = -100$, pour les déterminants positifs non carrés depuis $D = 2$ jusqu'à $D = 99$ et pour les treize déterminants négatifs irréguliers qui se trouvent dans le premier millier. Par M. *A. Cayley* à Londres. . . . . — 357

Note sur l'élimination. Par M. *A. Cayley* à Londres. . . . . .Seite 373
Ueber die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus. Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg i. B. . . . . — 375
Ueber die Identität der Prismatoide mit den Trapezoidalkörpern. Von Herrn *E. F. August.* . . . . . — 377
Zur Lebensgeschichte des Mathematikers *Ludwig Immanuel Magnus.* . . . . — 379
Inhaltsverzeichniss der Bände 51 bis 60. . . . . — 382

Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.

(Ex ill. *C. G. J. Jacobi* manuscriptis posthumis in medium protulit *A. Clebsch.*)

---

*Reductio problematis generalis in formam simpliciorem *).*

1.

Sit V functio quaesita, sint $q_1, q_2, \ldots q_m$ variabiles independentes atque $p_1, p_2, \ldots p_m$ differentialia partialia ipsius V secundum $q_1, q_2, \ldots q_m$. Problema de integratione aequationum differentialium partialium primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium hoc est:

Data aequatione inter quantitates $V, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, *ipsam* V *ut functionem ipsarum* $q_1, q_2, \ldots q_m$ *determinare.*

Supponam aequationem propositam ipsam functionem quaesitam V non continere. Quoties enim continet, problema ad aliud revocari potest, in quo numerus variabilium independentium unitate auctus est, sed functio ipsa incognita ex aequatione differentiali evasit. Introducta enim nova variabili t, sit

$$W = t.V,$$

erit

$$V = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots\ ^{**}).$$

Quibus valoribus substitutis in aequatione inter V et quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ proposita, prodibit aequatio inter variabiles independentes $t, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque differentialia partialia functionis W secundum variabiles illas sumta, ipsam functionem W non continens. Hinc, quia numerum variabilium independentium *m quemcunque* assumsimus, concessa est suppositio, aequationem differentialem propositam functionem incognitam non continere.

---

*) Epitomae paragraphorum in ipso manuscripto praeter paragraphos 66, 67 non inveniuntur. Quae tamen in usum lectoris, ut longioris commentationis decursus facilius perspiceretur, adjiciendae videbantur. *C.*

**) Significandis differentialibus partialibus signum characteristicum — ∂ —, significandis completis signum — d — adhibebo. Quod bene tenendum est.

Problema sub ea, qua in sequentibus utatur, forma proponitur.

2.

Si functio incognita ipsa aequationem differentialem partialem propositam non ingreditur, problema maxima generalitate sic enuntiari potest:

Proposita expressione

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

si data est aequatio inter quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, *invenire* $m-1$ *alias aequationes inter easdem quantitates, e quibus quantitates* $p_1, p_2, \ldots p_m$ *tales prodeant functiones ipsarum* $q_1, q_2, \ldots q_m$, *ut expressio proposita*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum dV.

Ut expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

sit differentiale completum, satisfieri debet $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationibus conditionalibus hoc schemate contentis:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right),$$

in qua aequatione indicibus i et k valores 1, 2, 3, ... m tribui possunt, vel ut aequationes tantum inter se diversae obtineantur, indici i tribuantur valores 1, 2, 3, ... $m-1$ et pro singulis ipsius i valoribus tribuantur indici k valores tantum ipso i maiores.

In aequationibus praecedentibus quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ consideratae sunt. Quod quoties fit, differentialia partialia illarum quantitatum uncis includam, sicuti antecedentibus factum est.

Conditionum integrabilitatis forma prima exhibetur.

3.

Negotium, quod suscipiam, primum est transformatio aequationum conditionalium. Quippe quas ita exhibeamus, quales fiunt, si non ut antea omnes $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones considerantur, sed

$$\begin{aligned}
p_1 &\text{ ut ipsarum } p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,\\
p_2 &\text{ ut ipsarum } p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,\\
p_3 &\text{ ut ipsarum } p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{m-1} &\text{ ut ipsarum } p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,\\
p_m &\text{ ut ipsarum } q_1, q_2, \ldots q_m
\end{aligned}$$

functiones. Ad quam suppositionem referam sequentibus differentiationes per partes instituendas, nisi aliud disertis verbis statutum sit, aut differentialia uncis inclusa reperias, quo facto semper innuitur, omnes p_1, p_2, ... p_m tamquam ipsarum q_1, q_2, ... q_m functiones spectari.

Systema *primum* aequationum conditionalium, quod respondet valori $i = 1$, hoc est:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right), \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right) = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right), \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_m}\right) = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).$$

Quod e supra statutis sic representari potest:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right), \\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right), \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}$$

Quae aequationes per aequationes conditionales in has transformari possunt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right), \\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right), \\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \left(\frac{\partial p_4}{\partial q_1}\right), \\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicemus aequationem 2^{am}, 3^{am}, ... $(m-1)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_2}{\partial p_3}$, $\frac{\partial p_2}{\partial p_4}$, ... $\frac{\partial p_2}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus a prima; multiplicemus aequationem 3^{am}, 4^{tam}, ... $(m-1)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}$, $\frac{\partial p_3}{\partial p_5}$, ... $\frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ et productarum summam subducamus de secunda; multiplicemus aequationem 4^{tam}, 5^{tam}, ... $(m-1)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}$, $\frac{\partial p_4}{\partial p_6}$, ... $\frac{\partial p_4}{\partial p_m}$, et productarum summam deducamus de tertia; et ita porro. Quibus patratis aliud eruimus systema aequationum, systemati primo aequivalens, hoc:

$$(\mathbf{A}.)\quad\left\{\begin{aligned}
&(\mathbf{1}.)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}+\ \cdots\ +\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_2}-\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\ \cdots\ -\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\\
&(\mathbf{2}.)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_3}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_3}{\partial q_5}+\ \cdots\ +\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\ \cdots\ -\frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\\
&(\mathbf{3}.)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_4}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_4}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4}+\frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5}+\ \cdots\ +\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\frac{\partial p_4}{\partial p_5}\frac{\partial p_1}{\partial q_5}-\ \cdots\ -\frac{\partial p_4}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_4}{\partial q_1}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(m-\mathbf{2}.)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_3}+\ \cdots\ +\frac{\partial p_1}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_{m-1}}-\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_1}\\
&(m-\mathbf{1}.)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_m}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_m}{\partial q_3}+\ \cdots\ +\frac{\partial p_1}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_m}{\partial q_1}.
\end{aligned}\right.$$

E quibus aequationibus differentialia partialia uncis inclusa evaserunt.

4.

Systema *secundum* aequationum conditionalium, quod respondet valori $i=2$, hoc est:

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\quad\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_4}\right)=\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\right),\quad\cdots\quad\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right)=\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right).$$

Designante k quemlibet e numeris 3, 4, ... m, aequatio

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right)$$

sic etiam exhiberi potest:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_k}\right)+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right)$$

quae adhibendo aequationes

$$\left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right),$$

in sequentem abit:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_3}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_4}\right)+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right).$$

Si aequationem 1^{am}, 2^{am}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ vocamus, quae prodeunt ex aequatione praecedente loco k respective ponendo valores $3, 4, \ldots m$, multiplicemus aequationem 2^{am}, 3^{am}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}$, $\frac{\partial p_3}{\partial p_5}$, ... $\frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus de prima; multiplicemus 3^{am}, 4^{tam}, ... $(m-2)^{\text{tam}}$ per $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}$, $\frac{\partial p_4}{\partial p_6}$, ... $\frac{\partial p_4}{\partial p_m}$ et productarum summam deducamus de secunda: et ita porro. Eruetur his transactis systema aequationum hoc:

$$(\mathbf{B.})\quad\left\{\begin{array}{l}
(\mathbf{1.})\ \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4}+\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_3}{\partial q_5}+\ \ldots\ +\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\\
\qquad+\frac{\partial p_2}{\partial q_3}-\frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}-\frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}-\ \ldots\ -\frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\\
(\mathbf{2.})\ \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_4}{\partial q_3}+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4}+\frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5}+\ \ldots\ +\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m}\\
\qquad+\frac{\partial p_2}{\partial q_4}-\frac{\partial p_4}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5}-\ \ldots\ -\frac{\partial p_4}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}=\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\\
\ldots\ldots\ldots

in qua i designare potest unumquemque e numeris $1, 2, 3, \ldots m-1$ atque pro singulis ipsius i valoribus designare potest k numerum unumquemque ipso i majorem usque ad valorem $k = m$. Quae igitur aequatio generalis amplectitur numerum $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationum inter se diversarum, quae e totidem aequationibus

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

derivatae sunt.

De forma usitata conditionem integrabilitatis ex ea quae proponitur deriranda.

6.

Vice versa ex aequationibus $(a.)$ deduci possunt aequationes conditionales initio propositae

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right),$$

sive demonstrari potest theorema sequens:

Theorema I.

Supponatur:

p_1 *functio quantitatum* $p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$

p_2 – – $p_3, p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$

p_3 – – $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$

. . . . . .

p_{m-1} – – $p_m, q_1, q_2, \ldots q_m,$

p_m – – $q_1, q_2, \ldots q_m,$

quae tales sint functiones, ut habeatur identice:

$$(a.)\quad \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p_k}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \quad + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k} - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}} - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}, \end{cases}$$

designante i unumquemque e numeris $1, 2, 3, \ldots m-1$ et pro singulis ipsius i valoribus designante k unumquemque e numeris $i+1, i+2, \ldots m$, unde numerus totus aequationum est $\frac{m(m-1)}{2}$; erunt aequationes illae numero $\frac{m(m-1)}{2}$ conditiones quum necessariae tum sufficientes, ut expressis

omnibus $p_1, p_2, \ldots p_m$ *per quantitates* $q_1, q_2, \ldots q_m$, *expressio*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum.

Forma secunda conditionum integrabilitatis.

7.

Conditiones illas esse necessarias antecedentibus comprobavi, quippe quas locum habere demonstravi, quoties expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum sit. Iam demonstrabo easdem conditiones esse *sufficientes*, sive quoties aequationes illae numero $\frac{m(m-1)}{2}$ locum habeant, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

esse differentiale completum.

Posito $k = m$, aequatio proposita fit:

$$(1.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Uncis rursus utimur, si $p_1, p_2, \ldots p_m$ ut solarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functiones spectamus, unde pro ipsa p_m perinde scribi potest $\frac{\partial p_m}{\partial q_i}$ sive $\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)$.

Posito $k = m-1$, fit:

$$0 = -\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Cui aequationi si addimus aequationem (1.) multiplicatam per $\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}$, prodit:

$$(2.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}}.$$

Posito $k = m-2$, fit

$$0 = -\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Cui aequationi addo aequationem (1.) per $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}$ et aequationem (2.) per $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}$ multiplicatam, prodit:

$$(3.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}}.$$

Et ita continuando, demonstras aequationem *generalem:*

$$(b.) \quad 0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

in qua k valores omnes induere potest m, $m-1$, $m-2$. ... usque ad $i+1$. Unde, si ipsi i rursus valores 1, 2, 3. ... $m-1$ tribuuntur, numerus aequationum $(b.)$ fit $\frac{m(m-1)}{2}$.

Forma tertia quae est usitata.

8.

Ex aequationibus $(a.)$ theorematis I. deduxi totidem aequationes $(b.)$. Iam ex his deducam aequationes

$$(c.) \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

quarum idem est numerus.

Supponam, pro omnibus numeris i' et k, qui dato numero i maiores, ipso m non majores sunt, iam probatas esse aequationes:

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i'}}\right).$$

Quarum ope aequatio $(b.)$ transformari potest in hanc:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\left(\frac{\partial p_{i+2}}{\partial q_k}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_k}.$$

quae eadem est atque haec:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right).$$

In qua, si placet, etiam $k = i$ ponere licet, quippe quo casu identica fit.

Valentibus igitur aequationibus** (b.), **si aequatio

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i'}}\right)$$

***comprobata est pro omnibus ipsorum i' et k valoribus** $i+1, i+2, \ldots m$, **eadem valebit pro omnibus ipsorum i' et k valoribus** $i, i+1, \ldots m$.*

Si ponitur $i = m-1$, in aequatione (*b.*) ipsi k unicus convenit valor $k = m$, unde fit illa:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m},$$

sive

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right).$$

Valent igitur aequationes (*c.*), in quibus $k > i$ statuatur, si $i = m-1$. Unde ex antecedentibus valebunt etiam, si $i = m-2$; unde ex antecedentibus valebunt etiam, si $i = m-3$, et ita porro; sive valebunt aequationes (*c.*) pro omnibus ipsius i valoribus $m-1, m-2, m-3, \ldots 2, 1$. Q. D. E. Comprobatis aequationibus (*c.*), sequitur, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum esse.

Systema conditionum $\frac{m(m-1)}{2}$, quibus satisfieri debet, ut expressio praecedens differentiale completum evadat, sub tribus formis (*a.*), (*b.*), (*c.*) exhibui. Quarum forma (*a.*) ad solvendum problema propositum sive ad determinandas functiones $p_1, p_2, \ldots p_m$ quae expressionem illam differentiale completum efficiant, prae ceteris idonea est.

De integrationibus quas e forma prima conditionum integrabilitatis solutio problematis propositi postulet.

9.

His praeparatis, iam integrationes transigendae accuratius describi possunt. Redit enim problema in determinationem functionum $p_1, p_2, \ldots p_m$, quae aequationibus (*a.*) satisfaciant. Ipsa quidem p_1 ut functio ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationem differentialem partialem propositam data est. Deinde ponendo in (*a.*) $i = 1, k = 2$, determinatur p_2 ut functio ipsarum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationem:

$$(1.)\quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} + \frac{\partial p_1}{\partial q_3}\frac{\partial p_2}{\partial p_3} + \frac{\partial p_1}{\partial q_4}\frac{\partial p_2}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_2}{\partial p_m}.$$

Quae est aequatio differentialis partialis *linearis*, cujus nota est integratio. Inventa functione p_2, quaecunque aequationi praecedenti satisfacit, ponamus in aequationibus $(a.)$: $i = 1, 2$ atque $k = 3$, prodeunt aequationes:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Si functionem p_1 non ut ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, sed substituto ipsius p_2 valore per integrationem aequationis (1.) invento, sicuti ipsam p_2, ut functionem ipsarum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ considerare placet, multiplicetur aequatio posterior per $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$ et priori addatur. Quo facto obtines, *si p_1 et p_2 ut functiones quantitatum reliquarum spectantur:*

$$(2.^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quarum aequationum altera ex altera invenitur indices 1 atque 2 inter se permutando. Binis aequationibus (2.) sive (2.*) ipsa p_3 ut functio quantitatum $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ determinanda est.

10.

Inventa per aequationum praecedentium integrationem etiam functione p_3, ponatur in (*a*.) $i=1, 2, 3$, atque $k=4$, prodeunt aequationes tres sequentes:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_6}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_6} + \cdots + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Si substitutis ipsarum p_2 et p_3 expressionibus per integrationes iam transactas inventis, omnes tres p_1, p_2, p_3 ut solarum $p_4, p_5, \cdots p_m, q_1, q_2, \cdots q_m$ considerare et ad hanc suppositionem differentiationes per partes referre placet, primum aequatio tertia per $\dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}$ multiplicata addatur secundae, prodit:

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Haec aequatio multiplicata per $\dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}$ et tertia aequationum (3.) multiplicata per $\dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}$ addatur primae, prodit:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_1}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Determinanda igitur est p_4 ut functio ipsarum $p_5, p_6, \cdots p_m, q_1, q_2, \cdots q_m$, quae simul tribus sequentibus aequationibus satisfaciat, *in quibus* p_1, p_2, p_3 *sunt functiones ipsarum* $p_4, p_5, \cdots p_m, q_1, q_2, \cdots q_m$, quales per integrationes praecedentes determinatae sunt:

$$(3.^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial q_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_4} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_5}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quae aequationes tres plane similes sunt et commutando indices 1, 2, 3, aliae ex aliis obtinentur.

Aequationes differentiales partiales lineares simultaneae, quibus ad singulas quantitates p eruendas satisfieri oportet; quae formam quartam conditionum integrabilitatis constituunt.

11.

Sic pergendo, determinatis $p_1, p_2, \ldots p_i$, ut functionibus ipsarum $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, generaliter determinanda erit p_{i+1} ut functio ipsarum $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per aequationes sequentes, quae sunt numero i:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Aequationes ($\alpha.$) constituunt formam *quartam*, qua exhiberi possunt conditiones integrabilitatis expressionis $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$. E qua forma haec colligis. Data p_1 ut functione reliquarum quantitatum per ipsam aequationem differentialem partialem propositam, invenitur p_2 per integrationem unius aequationis differentialis partialis linearis inter $2m-1$ variabiles; deinde p_3 satisfacere debet simul duabus aequationibus differentialibus partialibus linearibus, quae singulae sunt inter $2m-3$ variabiles; deinde p_4 satisfacere debet simul tribus aequationibus differentialibus partialibus linearibus quae singulae sunt inter $2m-5$ variabiles, et ita porro. *Ac generaliter, inventis ipsarum* $p_1, p_2, \ldots p_i$ *expressionibus per quantitates* $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ *determinatur* p_{i+1} *per* i *aequationes differentiales partiales lineares, quibus singulis satisfacere debet et quae singulae sunt inter* $2m-2i+1$ *variabiles.* Numerum igitur variabilium in investigatione cujusque insequentis functionis *duabus unitatibus* minui videmus; numerus quidem aequationum, quibus simul satisfacere debet functio quaesita, pro quaque insequente functione unitate crescit, sed hanc integrationem simultaneam, a qua abhorruisse videntur Analystae, non tantis difficultatibus impeditam esse infra patebit. Attamen antequam ipsam aggrediar integrationem istam simultaneam, conditiones integrabilitatis sub aliis adhuc formis exhibebo.

Theorema de forma conditionum integrabilitatis maxime generali.

12.

Si loco $i+1$ scribimus k atque per i numerum quemlibet ipso k minorem denotamus, aequationes ($\alpha.$) sic repraesentare licet:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_k}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{k+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_k}{\partial q_i} \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_m}. \end{cases}$$

In hac aequatione est p_k functio ipsarum $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$; functio autem p_i praeter has quantitates etiam ipsam p_k continet. Iam vero patet, expressionem

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}$$

eandem manere, sive in formandis $\dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}$, $\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}$ differentietur etiam quatenus $p_{k'}, q_{k'}$ a p_k implicantur, sive tantum, quod in aequatione praecedente sup-

positum est, quatenus in p_i explicite praeter p_k inveniuntur. Priori casu enim accederent termini se invicem destruentes:

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}-\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\right\}.$$

Praeterea, si ipsa p_i differentiatur secundum q_k etiam quatenus q_k implicatur ab ipsa p_k, quae in expressione ipsius p_i invenitur, scribere licet $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$ loco $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}+\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k}$. *Unde aequationem praecedentem, si et p_i et p_k tamquam solarum p_{k+1}, p_{k+2}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m functiones consideras, sic exhibere licet:*

$$(\beta.)\quad \frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}=$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}}+\frac{\partial p_i}{\partial p_{k+2}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k+2}}+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}-\cdots-\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_k}{\partial p_m}.$$

Ordo, in quem variabiles q et quae iis respondent p disposuimus, indicibus subscriptis indicatus, prorsus arbitrarius est. Qua de re in formula praecedente ($\beta.$) variabiles q_i, q_k binae quaelibet esse possunt e numero variabilium q, et q_{k+1}, q_{k+2}, ... q_m aliae quaelibet harum variabilium ab illis duabus diversae et cuiuslibet numeri, qui tamen numerum $m-2$ superare non potest. Statuendae autem sunt a q_i, q_k diversae, quum in formula ($\beta.$) suppositum sit $i<k$ ideoque i inter numeros $k+1$, $k+2$, ... m non inveniatur. Habemus igitur theorema sequens:

Theorema II.

Sint p_1, p_2, ... p_m eiusmodi functiones ipsarum q_1, q_2, ... q_m ut expressio $p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_mdq_m$ sit differentiale completum; si binae quaelibet p_i et p_k exprimuntur praeter q_1, q_2, ... q_m per alias quasdam e quantitatibus p a p_i et p_k diversas, p_λ, p_μ etc. quotcunque placet, id quod infinitis modis licet, atque differentiationes per partes instituendae ad hanc repraesentationem referuntur, erit

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}+\cdots$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}-\cdots.$$

Neque necessarium est, ut in theoremate praecedente p_i atque p_k easdem aut eundem numerum quantitatum p contineant; casus enim, quo functio datas quantitates continet, eum amplectitur, quo functio aliquas harum quantitatum vel omnes non involvit.

Theorematis antecedentis demonstratio directa.

13.

Theorema praecedens facile etiam directa via deducis ex aequationibus $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$. Primum enim probari potest, *in formula proposita expressionem ad dextram immutatam manere, si differentialia secundum* q_λ, q_μ, ... *sumta uncis includantur, sive esse*

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_\mu} + \cdots \\ -\dfrac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_\mu} - \cdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\dfrac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\dfrac{\partial p_k}{\partial q_\mu}\right) + \cdots \\ -\dfrac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\right) - \cdots \end{array}\right.$$

Repraesentemus enim aequationis antecedentis dextram partem hoc modo:

$$\sum_\lambda \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right),$$

subscripta λ indicando, summam ad omnes valores λ, μ, ... extendendam esse. Erit porro:

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

subscripta λ' similiter summam indicando ad eosdem valores λ, μ, ... extendi.

Hinc prodit

$$\sum_\lambda \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right)\right\} - \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right\}$$

$$= \sum_\lambda \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)\right\}$$

$$= \sum_\lambda \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right).$$

Indicibus λ et λ' quum omnino iidem valores conveniant, λ et λ' in duabus

summis praecedentibus inter se commutare licet. Quod si in posteriore facimus, expressio antecedens fit:

$$\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left\{\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)-\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right)\right\},$$

quae est expressio evanescens, quia

$$\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)=\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right).$$

Unde aequatio (1.) comprobata est.

Iam ex aequatione (1.) sequitur:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}+\cdots\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}-\cdots\\
&=\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_k}\right)+\cdots\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_i}\right)-\cdots\\
&=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\\
&=-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}+\frac{\partial p_k}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Q. D. E.

Si loco k in formulis (β.) ponitur i, atque λ loco i, patet e formulis illis sive e theor. II., in formulis (α.) esse p_1, p_2, ... p_i tales ipsorum q_1, q_2, ... q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_m functiones, ut inter binas earum p_k, p_λ locum habeat aequatio:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k}=\\
&\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\\
&-\frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.
\end{aligned}$$

Haec est relatio, qua fit, sicuti infra videbimus, ut aequationes (α.) simul integrari possint.

Problema alio modo proponitur. Functiones, quibus constantibus aequiparatis ipsae p_i per $q_1, q_2, \ldots q_m$ exprimantur, aequationibus simultaneis $\frac{n(n-1)}{2}$ definiuntur.

14.

Problema de integratione *completa* aequationis differentialis partialis inter $m+1$ variabiles $V, q_1, q_2, \ldots q_m$, quae functionem quaesitam V ipsam non continet, sic etiam proponi potest.

Sit V ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ functio m constantes $h_1, h_2, \ldots h_m$ involvens, quarum nulla per additionem tantum ei iuncta sit; sint $p_1, p_2, \ldots p_m$ differentialia partialia ipsius V respective secundum $q_1, q_2, \ldots q_m$ sumta. Quae differentialia partialia, quum ipsas constantes quoque $h_1, h_2, \ldots h_m$ involvant, vice versa aequari possunt $h_1, h_2, \ldots h_m$ ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ functionibus. Sint aequationes sic inventae:

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

designantibus $H_1, H_2, \ldots H_m$ functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ a se invicem independentes et nullam constantium $h_1, h_2, \ldots h_m$ involventes. *Quaeritur, data una harum aequationum, ex. gr.*

$$H_1 = h_1,$$

indagare reliquas $m-1$.

Investigemus aequationes conditionales *identicas*, quibus satisfacere debent functiones $H_1, H_2, \ldots H_m$, ut ipsis $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressis ope aequationum

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad H_3 = h_3, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

expressio differentialis

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

sit differentiale completum dV.

Ponamus in theoremate II. loco indicum i, k indices 1, 2, ac loco indicum $\lambda, \mu, \ldots$ omnes reliquos 3, 4, 5, $\ldots m$; unde eruitur aequatio:

$$(1.) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} + \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} \\ & - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}. \end{aligned} \right.$$

Sint

$$H_i = h_i, \quad H_k = h_k$$

duae quaelibet ex aequationibus propositis, quarum ope determinentur p_1 et p_2

ut functiones ipsarum p_3, p_4, $\cdots$ p_m, q_1, q_2, $\cdots$ q_m, quarum quantitatum ipsae p_1 et p_2 in aequatione praecedente functiones esse supponuntur. Sumtis deinde ipsarum p_1 et p_2 differentialibus partialibus secundum quantitates illas, substituantur in differentialibus illis, quae etiam constantes h_i et h_k involvunt, loco harum constantium functiones iis aequivalentes H_i et H_k, unde emergent eorum valores per quantitates p_1, p_2, $\cdots$ p_m, q_1, q_2, $\cdots$ q_m expressi absque ulla constanti h. Quos valores si in aequatione (1.) substituimus, aequatio illa evadere debet *identica*, cum nulla exstare possit aequatio inter quantitates p_1, p_2, $\cdots$ p_m, q_1, q_2, $\cdots$ q_m a constantibus h_1, h_2, $\ldots$ h_m prorsus libera nisi aequatio identica sit.

Ad eruendos valores differentialium partialium ipsarum p_1 et p_2, in aequatione (1.) substituendos, aequationes $H_i = h_i$, $H_k = h_k$ secundum p_3, p_4, $\cdots$ p_m, differentiemus. Sint r et t binae quaelibet harum quantitatum, erit

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} = -\frac{\partial H_i}{\partial r},$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_i}{\partial t},$$
$$\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} = -\frac{\partial H_k}{\partial r},$$
$$\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_k}{\partial t}.$$

Unde, multiplicatis prima et quarta, secunda et tertia, subductisque productis, nanciscimur:

$$(2.)\quad \left\{\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\partial p_2}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left. = \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial t} - \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial r}.\right.$$

Porro ex aequatione prima et tertia sequitur:

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial r} - \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} \\ -\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial r} - \frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}. \end{array}\right.$$

Multiplicemus aequationem (1.) per

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}$$

ac ponamus in aequationibus (3.) q_1 et q_2 loco r, in aequatione (2.) q_3, q_4, $\cdots$ q_m

loco r, simulque respective p_3, p_4, ... p_m loco t. Quo facto ex aequatione (1.) prodit:

$$(\gamma.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_1} + \dfrac{\partial H_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial H_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_m} \\ -\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}\dfrac{\partial H_k}{\partial p_1} - \dfrac{\partial H_i}{\partial q_2}\dfrac{\partial H_k}{\partial p_2} - \cdots - \dfrac{\partial H_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial H_k}{\partial p_m} \end{array} \right. = 0.$$

Quae est aequatio identica quaesita, a constantibus h prorsus libera.

15.

Si in aequatione $(\gamma.)$ indicibus i et k valores omnes tribuuntur, quos induere possunt, nanciscimur aequationes $\frac{m(m-1)}{2}$, quae et ipsae tamquam conditiones spectari possunt, ut expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

integrabilis evadat. Habetur enim etiam theorema inversum:

Theorema III.

Sint H_1, H_2, ... H_m variabilium p_1, p_2, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m functiones quaecunque a se independentes, quarum binae quaelibet H_i, $H_{i'}$ satisfaciant aequationi:

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m};$$

si ex aequationibus

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

in quibus h_1, h_2, ... h_m sunt constantes arbitrariae ipsas functiones H_1, H_2, ... H_m non afficientes, eruuntur ipsarum p_1, p_2, ... p_m valores per q_1, q_2, ... q_m expressi, expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale completum fit.

Quod est theorema gravissimum.

Theorema antecedens de solutione problematis $\frac{n(n-1)}{2}$ *aequationibus simultaneis definienda directa via confirmatur.*

16.

Demonstratio directa praecedentis theorematis haec sese offert. E differentiatione aequationis

$$H_i = h_i$$

secundum $q_{k'}$ facta sequitur, si subscripta k signo summationis indicamus, summam ad valores 1, 2, ... m ipsius k extendi *):

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

Unde etiam multiplicatione per $\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}$ facta:

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

In qua aequatione loco k' ponendo omnes ejus valores 1, 2, ... m, fit:

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

Unde etiam, permutando H_i et $H_{i'}$,

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} = 0.$$

Hanc aequationem detrahendo de antecedente, cum sit ex hypothesi:

$$\sum_{k'}\left\{\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\right\} = 0,$$

eruimus:

$$\sum_k \sum_{k'}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) = 0.$$

Permutando k et k', quippe quibus iidem valores 1, 2, ... m conveniunt, expressionem ad laevam sic quoque scribere licet:

$$-\sum_k \sum_{k'}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right).$$

---

*) Simili notatione saepius in sequentibus utar, quoties sub signo summatorio plures indices inveniuntur, quorum alii constantes, alii, ut ita dicam, summantes sunt; maioris perspicuitatis causa posteriores signo summatorio subscribam.

Unde aequationem antecedentem hoc modo repraesentare possumus:

$$\Sigma\Big(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\Big)\Big\{\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big)\Big\} = 0,$$

siquidem extenditur summa ad $\frac{m(m-1)}{2}$ combinationes numerorum 1, 2, ... m pro ipsis k et k' ponendas, sive si ipsi k sub signo summatorio valores 1, 2, ... $m-1$ tribuuntur, et pro singulis k ipsis k' valores $k+1$, $k+2$, ... m.

Si in aequatione praecedente pro ipsis i et i' bini quilibet e numeris 1, 2, ... m ponuntur, eruuntur ex ea $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationes. In quibus si quantitates

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big)$$

ut incognitas consideramus, sunt aequationes illae respectu harum incognitarum *lineares*, numerus incognitarum idem atque aequationum, et partes constantes omnes evanescentes. Unde ipsae quoque incognitae omnes evanescunt, sive pro quolibet ipsorum k et k' valore fit

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big) = 0.$$

Q. D. E.

Demonstratione antecedente etiam maxime directa via comprobari potuisset, si

$$\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\Big)-\Big(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\Big) = 0,$$

sive si

$$p_1 dq_1+p_2 dq_2+\cdots+p_m dq_m$$

integrabilis sit, fieri

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1}+\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1}-\frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m} = 0.$$

Ceterum, quod in demonstratione antecedente theorematis III adhuc desiderari potest, ut comprobetur e $\frac{m(m-1)}{2}$ aequationibus linearibus:

$$\sum_{k,k'}\Big(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}-\frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\Big)x_{k,k'} = y_{i,i'}$$

in quibus quantitates $x_{k,k'}$ incognitas, quantitates $y_{i,i'}$ partes aequationum con-

stantes designant, nullam e reliquis fluere facile variis modis probatur, quum adeo eiusmodi aequationes ex elementis algebraicis sine negotio generaliter resolvantur. Quae resolutio tum demum illusoria fit, si habetur

$$\Sigma \pm \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial H_m}{\partial p_m} = 0,$$

indicibus $1, 2, \ldots m$ sub signo summatiorio omnimodis permutatis signisque $\pm$ pro ratione nota alternantibus. Haec autem aequatio ipsa est conditio, ut inter quantitates $H_1, H_2, \ldots H_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ aequatio locum habeat, ab ipsis p prorsus libera; quod si foret, haberetur etiam inter ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m$ et constantes arbitrarias relatio neque ex aequationibus

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_m = h_m,$$

omnes $p_1, p_2, \ldots p_m$, quod supposuimus, ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$ determinari possent.

Transformatio systematum aequationum quarum solutione simultanea secundum §. 11 *singulae p_i obtinentur.*

§. 17.

Iam ipsam aggressuri integrationem revertamur ad formam aequationum conditionalium (α.) §. 11. Difficultatem rei videmus consistere in invenienda functione quae simul numero i aequationum differentialium partialium linearium satisfaciat. Sit f functio ipsarum $p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, atque

$$f = a$$

aequatio, qua determinetur functio quaesita p_{i+1} per $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, designante a constantem arbitrariam, quae ipsam f non afficiat. Designantibus p_n atque q_n quaslibet e quantitatibus $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m$ atque $q_1, q_2, \ldots q_m$ fit

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} = -\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = -\frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Unde aequationes (α.) multiplicatae per $\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}$ in has abeunt:

$$(d.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

In his aequationibus considerantur p_1, p_2, $\ldots$ p_i tamquam functiones datae ipsarum p_{i+1}, p_{i+2}, $\ldots$ p_m, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, inter quarum binas p_k et p_λ locum habet relatio, quam sub finem §. 13 apposui; et quaerenda est earundem quantitatum functio f talis, quae aequationibus praecedentibus simul omnibus identice satisfaciat.

Theorema affertur circa aequationum quae supra occurrunt integratione simultanea.

§. 18.

Non ego hic immorabor quaestioni generali, quando et quomodo duabus compluribusve aequationibus differentialibus partialibus una eademque functione satisfieri possit, sed ad casum propositum particularem investigationem restringam. Quippe quo praeclaris uti licet artificiis ad integrationem expediendam commodis. Maxime autem res absolvitur theoremate sequente:

Theorema IV.

Sint k, λ quilibet diversi e numeris 1, 2, $\ldots$ i; sit $\varphi = f$ integrale quodcunque unius ex aequationibus $(d.)$:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

erit expressio

$$f = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}$$

alterum ejusdem aequationis integrale.

In hoc theoremate designant p_k, p_λ ipsarum q_k, q_λ, q_{i+1}, q_{i+2}, $\cdots$ q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, $\cdots$ p_m functiones, quae satisfaciunt aequationi:

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k} =$$
$$\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial q_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.$$

Quae functiones si etiam alias praeter q_k et q_λ e quantitatibus q_1, q_2, $\cdots$ q_i involvunt, eae tamquam quantitates constantes considerantur.

Quomodo ope theorematis antecedentis integratio simultanea succedat, ostenditur.

§. 19.

Ope theorematis praecedentis sic absolvitur integratio proposita. Sint φ_λ, φ'_λ, φ''_λ, etc. functiones, quae proveniunt ex expressione

$$\frac{\partial f}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m},$$

ponendo loco f successive functiones φ, φ'_λ, φ''_λ, $\ldots$, ita ut generaliter habeatur:

$$\varphi_\lambda^{(n)} = \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_m}.$$

Sit jam $\varphi = f$, integrale quodcunque aequationis

$$(1.) \quad \begin{cases} 0 = f_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

erunt e theoremate IV etiam φ_2', φ_2'', φ_2''', cet. integralia ejusdem aequationis. Id quod patet, si in theoremate citato in locum ipsius φ aliae post alias substituuntur functiones φ_2', φ_2'', cet. Sed exstant tantummodo $2(m-i)$ integralia aequationis praecedentis a se invicem independentia et quorum aliud integrale quodvis functio esse debet, quam functionem praeterea etiam quantitates $q_2, q_3, \ldots q_i$ tamquam constantes ingredi possunt. Sit igitur $\varphi_2^{(\mu)}$ *prima* functio, quae per antecedentes φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$ et ipsas q_2, q_3, $\ldots$ q_i exprimi potest, index μ numero $2(m-i)$ aut inferior aut certe non major. Statuatur, ipsam Π esse functionem ipsarum φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, q_2, q_3, $\ldots$ q_i, erit etiam

$$f = \Pi$$

integrale aequationis (1.), quippe cujus integralia e theoremate IV. sunt φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, ipsae vero q_2, q_3, $\ldots$ q_i in aequatione (1.) pro constantibus habentur. Substituto valore $f=\Pi$ in aequatione:

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

haec aequatio hanc induit formam:

$$(2''.)\quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\varphi_2' + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2'}\varphi_2'' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2^{(\mu-1)}}\varphi_2^{(\mu)} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2},$$

in qua variabiles independentes sunt φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$ $\varphi_2^{(\mu-1)}$, q_2. Cujus aequationis integratio jam suppeditat functionem $f=\Pi$, quae satisfaciat simul duabus aequationibus (1.) et (2.).

Evenire potest, ut identice evadat $\varphi_2'=0$, quo casu sine ulteriore integratione ipsa functio $f=\varphi$, aequationis (1.) integrale, etiam aequationis (2.) integrale habetur. Si generalius est $\varphi_2'=c$, designante c constantem, erit

$$\Pi = \varphi - cq_2 = f$$

utriusque simul aequationis (1.) et (2.) integrale.

20.

Postquam antecedentibus monstratum est, quomodo functio $\Pi=f$ inveniatur, quae simul duabus aequationibus (1.) et (2.) satisfacit, id quod ope theorematis IV successit, jam ejusdem theorematis ope ex inventa functione Π aliam deducam Ψ, quae loco ipsius f posita duabus aequationibus illis simul

atque tertiae

$$(3.)\quad \begin{cases} 0 = f_3' = \dfrac{\partial f}{\partial q_3} + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_3}{\partial q_m}\dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}\dfrac{\partial f}{\partial q_m} \end{cases}$$

satisfaciat.

Erunt enim e theoremate IV, siquidem in eo loco φ ponimus Π, atque statuimus $\lambda = 3$, ipsi k vero valores 1 et 2 tribuimus, functiones Π_3', Π_3'', ... simul utriusque aequationis (1.) et (2.) integralia. Sit $\Pi_3^{(\mu')}$ proxima functio, quae per praecedentes Π_3, Π_3', ... $\Pi_3^{(\mu'-1)}$ et ipsas q_3, q_4, ... q_i exprimi potest: numerus μ' rursus ipsum $2(m-i)$ superare non potest. Posito

$$f = \Psi,$$

designante Ψ functionem ipsarum Π, Π_3', Π_3'', ... $\Pi_3^{(\mu-1)}$, q_3, quam etiam quantitates q_4, q_5, ... q_i tamquam constantes ingredi possunt, abit (3.) in hanc:

$$(3^a.)\quad 0 = \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi}\Pi_3' + \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi_3'}\Pi_3'' + \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi_3''}\Pi_3''' + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial\Pi_3^{(\mu'-1)}}\Pi_3^{(\mu')} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_3}.$$

Quodcunque integrale hujus aequationis, in qua Π, Π_3', Π_3'', ... $\Pi_3^{(\mu'-1)}$, q_3 sunt variabiles independentes, suppeditat functionem quaesitam $f = \Psi$, quae simul tribus aequationibus (1.), (2.), (3.) satisfacit.

Et sic pergi potest, usque dum habeatur functio f simul omnibus i aequationibus $(d.)$ satisfaciens.

21.

Ex antecedentibus hic fit integrationum decursus, quibus eruatur functio i aequationibus $(d.)$ simul omnibus satisfaciens. Ante omnia quaerenda erat functio φ aequationi (1.) satisfaciens. Quam notum est haberi, si

$$\varphi = \text{Constans}$$

est integrale unum quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium sequentis:

$$(a.)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{i+1}}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}, & \dfrac{dq_{i+1}}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}, \\ \dfrac{dp_{i+2}}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}, & \dfrac{dq_{i+2}}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dp_m}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \dfrac{dq_m}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Aequatio enim $\varphi =$ Constans integrale dicitur aequationum differentialium vulgarium ($a.$) si per eas aequationi $d\varphi = 0$ identice satisfiat. Id quod fieri non potest nisi aequatio (1.) identice locum habeat.

Inventa functione φ, ex ea deducantur functiones φ', φ'', ... $\varphi^{(\mu-1)}$ — indices subscriptos rejicio — atque exprimatur $\varphi^{(\mu)}$ per q_2, φ, φ', ... $\varphi^{(\mu-1)}$, quam expressionem etiam q_3, q_4, ... q_i afficere possunt tamquam constantes. Quo facto invenitur functio Π aequationi (2'.) satisfaciens, si aequatio

$$\Pi = \text{Constans}$$

est unum integrale quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dq_2}, \quad \varphi'' = \frac{d\varphi'}{dq_2}, \quad \ldots \quad \varphi^{(\mu-1)} = \frac{d\varphi^{(\mu-2)}}{dq_2}, \quad \varphi^{(\mu)} = \frac{d\varphi^{(\mu-1)}}{dq_2}.$$

Sit ipsius $\varphi^{(\mu)}$ haec expressio:

$$\varphi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(q_2, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}),$$

sequitur ex antecedentibus, si sit

$$\Pi\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right) = \text{Constans}$$

unum integrale quodcunque aequationis differentialis vulgaris μ^{ti} ordinis inter duas variabiles φ et q_2,

$$(b.) \qquad \frac{d^\mu \varphi}{dq_2^\mu} = \varphi^{(\mu)}\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \frac{d^2\varphi}{dq_2^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right),$$

fieri

$$\Pi(q_2, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)})$$

functionem Π quaesitam, quae simul aequationibus (1.) et (2.) satisfacit.

Tertio loco e functione Π deducantur functiones Π', Π'', ... $\Pi^{(\mu'-1)}$ atque per has et q_3 exprimatur $\Pi^{(\mu')}$; sit expressio inventa

$$\Pi^{(\mu')} = \Pi^{(\mu')}(q_3, \Pi, \Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(\mu'-1)});$$

proponatur aequatio differentialis μ'^{ti} ordinis inter duas variabiles Π et q_3:

$$(c.) \qquad \frac{d^{\mu'}\Pi}{dq_3^{\mu'}} = \Pi^{(\mu')}\left(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \frac{d^2\Pi}{dq_3^2}, \ldots \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\right);$$

cujus integrale unum quodcunque si est

$$\Psi\left(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \frac{d^2\Pi}{dq_3^2}, \ldots \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\right) = \text{Constans},$$

est expressio

$$\Psi(q_3, \Pi, \Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(\mu'-1)})$$

functio quaesita Ψ, quae simul tribus aequationibus (1.), (2.), (3.) satisfacit. Id quod simili demonstratione liquet atque in functione Π investiganda dedimus. Functionem Ψ etiam quantitates q_4, q_5, ... q_i afficere possunt tamquam constantes.

Et sic pergi potest, usque dum habeatur functio f omnibus i aequationibus $(d.)$ satisfaciens. Ad quam inveniendam primum quod est principale eruendum est integrale quodcunque systematis aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $2(m-i)+1$ variabiles, quod locum tenet unius aequationis inter duas variabiles $(2m-2i)^{\text{ti}}$ ordinis. Deinde condendae sunt aliae post alias $i-1$ aequationes differentiales vulgares inter duas variabiles ordinis μ^{ti}, μ'^{ti}, μ''^{ti}, ... $\mu^{(i-2)\text{ti}}$, et singularum inveniendum est unum integrale quodcunque, quod formandae aequationi differentiali insequenti inservit. Numeri autem μ, μ', μ'', ... $\mu^{(i-2)}$ omnes erunt ipso $2(m-i)$ aut minores aut certe non majores. Si postremae aequationis integrale est

$$f = a_i,$$

designante a_i constantem arbitrariam, atque ex hac aequatione petitur ipsius p_{i+1} valor per p_{i+2}, p_{i+3}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m expressus, erit valor ille talis, qui omnibus i aequationibus $(\alpha.)$ §. 11 simul satisfacit. Quo invento etiam p_1, p_2, ... p_i, quae datae supponuntur functiones ipsarum p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m, exprimi possunt per p_{i+2}, p_{i+3}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m; et pergi potest ad integrationem simultaneam insequentis systematis $i+1$ aequationum differentialium partialium, quae ex aequationibus $(\alpha.)$ proveniunt, si $i+1$, loco i ponitur, et cujus aequationes singulae numerum variabilium *duabus* unitatibus minorem continent.

Aequationes differentiales vulgares inter binas variabiles μ^{ti}, μ'^{ti}, cet. ordinis tamquam *auxiliares* spectari possunt; dum systema aequationum differentialium vulgarium $(\alpha.)$, quae sunt primi ordinis, sed inter $2(m-i)+1$ variabiles tamquam *principale* considerari potest. Quod systema principale si per eliminationem variabilium omnium praeter duas earumque differentialia ad unam revocas aequationem differentialem inter duas variabiles, ascendet ea ad ordinem $2(m-i)$ neque ad minorem ascendere potest. Ordo autem aequationis cujusvis auxiliaris pendet ab eo, quod inventum est, integrali aequationis auxiliaris praecedentis, et prout hoc vel illud inveneris, ordo major aut inferior fieri potest, qui tamen ordinem $2(m-i)$ aequationis principalis numquam egredi potest. Quin etiam e numeris μ, μ', ... exsistere possunt qui evanescant, ita ut una aut pluribus aut adeo omnibus integrationibus auxiliaribus omnino supersedeatur.

Integrationum, quibus totius problematis solutio secundum methodum propositam absolvatur, decursus describitur.

22.

Si totum negotium inde ab initio prosequimur, hic erit rei processus. Data p_1 ut functione ipsarum $p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, quae est aequatio differentialis partialis proposita, reliquae quantitates $p_2, p_3, \ldots p_m$ ita determinandae sunt tamquam functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m$, ut evadat expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

ipsa quoque p_1 per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressa, differentiale completum; quo facto erit

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

functio incognita, aequationi differentiali partiali propositae satisfaciens.

Conditur primum systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}, & \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cujus systematis si est integrale quodcunque

$$f_1 = a_1,$$

designante a_1 constantem arbitrariam, ex hac aequatione determinatur p_2 ut functio quantitatum $p_3, p_4, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, unde etiam p_1 ut functio earundem quantitatum determinari potest. Quo facto, conditur systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cujus systematis si est integrale

$$\varphi = \text{Constans},$$

formantur expressiones

$$\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi}{\partial p_m},$$
$$\varphi'' = \frac{\partial\varphi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi'}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi'}{\partial p_m},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

usque dum perveniatur ad functionem

$$\varphi^{(\mu)} = \frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_3} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_m},$$

quae per antecedentes φ, φ', φ'', $\ldots$ $\varphi^{(\mu-1)}$ et ipsam q_2 exprimi potest, quod semper evenit pro numero $\mu \leqq 2m-4$. Si expressio ipsius $\varphi^{(\mu)}$ est

$$\varphi^{(\mu)}(q_2,\ \varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \ldots\ \varphi^{(\mu-1)}),$$

formatur aequatio differentialis μ^{ti} ordinis:

$$(2^a.) \qquad \frac{d^\mu\varphi}{dq_2^\mu} = \varphi^{(\mu)}\left(q_2,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{dq_2},\ \frac{d^2\varphi}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right).$$

Cuius integrale quodcunque si est

$$f_2\left(q_2,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{dq_2},\ \frac{d^2\varphi}{dq_2^2},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right) = a_2,$$

designante a_2 constantem arbitrariam, formatur aequatio:

$$f_2 = f_2(q_2,\ \varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \ldots\ \varphi^{(\mu-1)}) = a_2,$$

atque ope aequationum

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

exprimuntur p_1, p_2, p_3 per p_4, p_5, $\ldots$ p_m q_1, q_2, $\ldots$ q_m. Quo facto conditur systema aequationum differentialium vulgarium sequens:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \frac{dp_5}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_5}, & \frac{dq_5}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_5}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Cuius systematis integrale si est

$$\Pi = \text{Constans},$$

formantur functiones:

$$\Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Pi}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi}{\partial p_4} - \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Pi}{\partial p_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi}{\partial p_m},$$

$$\Pi'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_4} - \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_m}$$

etc. etc.

usque dum perveniatur ad functionem

$$\Pi^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_m},$$

quae per antecedentes Π, Π', Π'', $\ldots$ $\Pi^{(\nu-1)}$ et ipsam q_2 exprimi potest existente $\nu \leqq 2m-6$. Quam expressionem etiam q_3 tamquam constans afficere potest. Scribendo igitur loco $\Pi^{(\nu)}$ hanc expressionem:

$$\Pi^{(\nu)}(q_2, \Pi, \Pi', \ldots \Pi^{(\nu-1)}),$$

conditur aequatio differentialis ν^{ti} ordinis:

$$(3^a.) \qquad \frac{d^\nu \Pi}{dq_2^\nu} = \Pi^{(\nu)}\left(q_2, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_2}, \ldots \frac{d^{\nu-1}\Pi}{dq_2^{\nu-1}}\right).$$

Cuius aequationis integrale aliquod quodcunque si est

$$\Pi_1 = \text{Constans},$$

formantur functiones

$$\Pi_1' = \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi}{\partial p_m},$$

$$\Pi_1'' = \frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_m},$$

etc. etc.

usque dum perveniatur ad functionem $\Pi^{(\nu')}$, quae per praecedentes Π_1, Π_1', Π_1'', ... $\Pi_1^{(\nu'-1)}$, et ipsam q_3 exprimi potest, rursus existente $\nu' \leqq 2m-6$. Quae expressio si est

$$\Pi_1^{(\nu')}(q_3,\ \Pi_1,\ \Pi_1',\ \Pi_1'',\ \ldots\ \Pi_1^{(\nu'-1)})$$

conditur aequatio differentialis ν'^{ti} ordinis:

$$(3^b.) \qquad \frac{d^{\nu'}\Pi_1}{dq_3^{\nu'}} = \Pi_1^{(\nu')}\Big(q_3,\ \Pi_1,\ \frac{d\Pi_1}{dq_3},\ \frac{d^2\Pi_1}{dq_3^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\Big),$$

cuius unum quaeritur integrale quodcunque

$$f_3\Big(q_3,\ \Pi_1,\ \frac{d\Pi_1}{dq_3},\ \frac{d^2\Pi_1}{dq_3^2},\ \ldots\ \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\Big) = a_3,$$

designante a_3 constantem arbitrariam. Quo invento formatur aequatio

$$f_3 = f_3(q_3,\ \Pi_1,\ \Pi_1',\ \Pi_1'',\ \ldots\ \Pi_1^{(\nu'-1)}) = a_3,$$

et ope trium aequationum,

$$f_1 = a_1,\quad f_2 = a_2,\quad f_3 = a_3$$

exprimuntur p_1, p_2, p_3, p_4 ut functiones ipsarum p_5, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m. Et ita porro. Totum negotium in has integrationes desinit. Scilicet inventis per methodum assignatam aequationibus

$$f_1 = a_1,\quad f_2 = a_2,\quad \ldots\quad f_{m-2} = a_{m-2},$$

in quibus a_1, a_2, ... a_{m-2} sunt constantes arbitrariae, quarum unaquaeque a_i functiones f_{i+1}, f_{i+2}, ... f_{m-2} neque vero ullam eas praecedentem f_1, f_2, ... f_i afficit, exprimantur ope harum aequationum et aequationis differentialis partialis propositae p_1, p_2, ... p_{m-1} ut functiones ipsarum p_m, q_1, q_2, ... q_m, et proponantur aequationes

$$\frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m},\quad \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m};$$

quae quum duo integralia habeant, sit alterum

$$\psi = \text{Constans},$$

et formentur functiones

$$\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m},$$

$$\psi'' = \frac{\partial\psi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial\psi'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial\psi'}{\partial p_m};$$

si ψ' est functio ipsius ψ ipsarumque q_2, q_3, ... q_m,

$$\psi' = \psi'(q_2,\ \psi)$$

integretur aequatio primi ordinis:

$$\frac{d\psi}{dq_2} = \psi'(q_2, \psi);$$

si vero ψ' non est functio ipsius ψ ipsarumque q_2, q_3, ... q_m, certe erit ψ'' functio ipsarum ψ, ψ' et quantitatum q_2, q_3, ... q_m,

$$\psi'' = \psi''(q_2, \psi, \psi'),$$

quo casu quaeratur alterum integrale aequationis differentialis secundi ordinis:

$$\frac{d^2\psi}{dq_2^2} = \psi''\left(q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}\right);$$

quibus in aequationibus considerantur q_3, q_4, ... q_m ut constantes; sit integrale huius vel illius aequationis

$$\psi_1 = \text{Constans},$$

designante ψ_1 priore casu ipsarum q_2, ψ, posteriore ipsarum q_2, ψ, $\frac{d\psi}{dq_2}$ functionem, ac restituatur posteriore casu ψ' loco $\frac{d\psi}{dq_2}$ in functione ψ_1, quo facto formentur rursus functiones

$$\psi_1' = \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_m},$$

$$\psi_1'' = \frac{\partial\psi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial q_m} - \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial p_m};$$

erit aut ψ_1' ipsarum ψ_1, q_3, q_4, ... q_m aut, si hoc locum non habet, certe ψ_1'' ipsarum ψ_1, ψ_1', q_3, q_4, ... q_m functio; quaeratur integrale priore casu aequationis

$$\frac{d\psi_1}{dq_3} = \psi_1',$$

posteriore casu aequationis

$$\frac{d^2\psi_1}{dq_3^2} = \psi_1'',$$

siquidem in ψ_1'' loco ψ_1' ponitur $\frac{d\psi_1}{dq_3}$, ipsis q_4, q_5, ... q_m in hac vel illa aequatione consideratis ut constantibus; si integrale quaesitum est

$$\psi_2 = \text{Constans},$$

ac posteriore casu in ψ_2 loco $\frac{d\psi_1}{dq_3}$ restituitur ψ_1', iam simili modo e ψ_3 deducatur functio ψ_4, ex hac ψ_5 et ita porro; postremo ex inventa functione

ψ_{m-3} formetur functio

$$\psi'_{m-3} = \frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial p_m},$$

quae si est ipsarum ψ_{m-3}, q_{m-1}, q_m functio, quaeratur integrale aequationis

$$\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}} = \psi'_{m-3};$$

sin minus, formetur adhuc functio

$$\psi''_{m-3} = \frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial q_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial p_m},$$

erit ψ''_{m-3} ipsarum ψ_{m-3}, ψ'_{m-3}, q_{m-1}, q_m functio: in qua si loco ψ'_{m-3} ponitur $\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}}$, quaeratur integrale aequationis differentialis secundi ordinis $\frac{d^2\psi_{m-3}}{dq_{m-1}^2} = \psi''_{m-3}$, in hac et illa aequatione considerata q_m ut constante; sit integrale quaesitum

$$f_{m-1} = a_{m-1},$$

in quo posteriore casu restituendum est ψ'_{m-3} loco $\frac{d\psi}{dq_{m-3}}$, designante a_{m-1} constantem arbitrariam; erit inventa functione f_{m-1} totum negotium finitum. Scilicet erutis ex aequationibus

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

et ex aequatione differentiali partiali proposita ipsarum p_1, p_2, $\ldots$ p_m valoribus per q_1, q_2, $\ldots$ q_m expressis, fit

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiale exactum atque

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

integrale aequationis differentialis partialis propositae, praeter constantem arbitrariam additione addendam alias $m-1$ constantes arbitrarias involvens a_1, a_2, $\ldots$ a_{m-1}.

Systemate aequationum differentialium vulgarium revocato ad unam aequationem differentialem inter duas variabiles, ordo systematis secundum huius aequationis differentialis ordinem aestimetur sive secundum numerum constantium arbitrariarum, quas integratio eius completa secum fert. Iam si aequationum differentialium auxiliarium systemata omnia ad summum ordinem ascendunt, ad quem ascendere possunt, per methodum antecedentibus propositam quaerendum est unum integrale quodcunque $\frac{m(m-1)}{2}$ systematum

aequationum differentialium inter duas variabiles; et quidem

unius	$(2m-2)^{ti}$	ordinis
duarum	$(2m-4)^{ti}$	–
trium	$(2m-6)^{ti}$	–
. . . . .		
$m-1$	2^{ti}	–

Sed systematum aequationum auxiliarium ordo plerumque multo inferior evadit; qua de re accuratius dicetur, $m-1$ systematum, quae alia post alia conduntur atque respective $(2m-2)^{ti}$, $(2m-4)^{ti}$, ... 2^{ti} ordinis sunt, singulorum unum integrale quaerendum esse; atque insuper pro singulis systematis $(2m-2i)^{ti}$ ordinis formanda esse $i-1$ systemata auxiliaria alia post alia, quae ordinem $(2m-2i)^{tum}$ non excedunt, plerumque multo inferioris ordinis sunt, et quorum singulorum unum integrale investigandum est. Methodi hactenus notae poscebant systematis $(2m-2)^{ti}$ ordinis integrationem completam, quod post unum integrale inventum ad integrationem completam aequationis differentialis vulgaris inter duas variabiles $(2m-3)^{ti}$ ordinis reducitur. Dicere solebant Analystae, se aequationem differentialem integrasse, quam ad integrationes aequationum differentialium inferiorum ordinum reduxerint. Hac mente aequatio illa $(2m-3)^{ti}$ ordinis per methodos a me antecedentibus propositas generaliter integrata est, quippe ad aequationes ordinis $(2m-4)^{ti}$ et inferiorum ordinum reducta.

Agitur de demonstratione theorematis IV., §. 18, quo antecedentia nituntur. De inversione operationum differentialium.

23.

Demonstrandum restat theorema IV., quo analysis antecedens tota innititur. Quam demonstrationem paullo altius repetam.

Sit f functio n variabilium x_1, x_2, ... x_n, ac proponantur duae expressiones:

$$\mathrm{A}[f] = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\mathrm{B}[f] = B_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + B_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in quibus A_1, A_2, ... atque B_1, B_2, ... sunt datae ipsarum x_1, x_2, ... x_n functiones quaecunque. Ipsae

$$\mathrm{A}[f], \quad \mathrm{B}[f]$$

sunt notationes mere symbolicae, expressiones notantes, quae post certas operationes circa functionem f transactas prodeunt; quas operationes *primam* et *secundam* dicam. Subiiciamus expressionem $\mathrm{B}[f]$ operationi primae, expressionem $\mathrm{A}[f]$ operationi secundae et expressiones inde prodeuntes alteram de altera deducamus, dico, *expressionem*

$$\mathrm{A}[\mathrm{B}[f]]-\mathrm{B}[\mathrm{A}[f]]$$

differentialia partialia secunda functionis f non continere, sed in ipsam formam redire:

$$\mathrm{C}[f] = C_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+C_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+C_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Nam in altera expressione

$$\mathrm{A}[\mathrm{B}[f]]$$

evoluta multiplicatur $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ per A_iB_i atque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, si i et k inter se diversi sunt, per $A_iB_k+A_kB_i$; altera vero expressio quum de altera prodeat, A et B inter se permutando quo coefficientes illi non mutantur, ex utriusque expressionis differentia terminos illos prorsus abire patet. Eruitur porro in aequatione inventa:

$$\mathrm{A}[\mathrm{B}[f]]-\mathrm{B}[\mathrm{A}[f]] = \mathrm{C}[f]$$

terminus generalis

$$C_i = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n}$$
$$-B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1}-B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2}-\cdots-B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n}.$$

Statuatur generaliter

$$\mathrm{A}^i[f] = \mathrm{A}[\mathrm{A}^{i-1}[f]],$$

ita ut sit:

$$\mathrm{A}^2[f] = \mathrm{A}[\mathrm{A}[f]],$$
$$\mathrm{A}^3[f] = \mathrm{A}[\mathrm{A}^2[f]],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ac simili modo sit generaliter:

$$\mathrm{B}^i[f] = \mathrm{B}[\mathrm{B}^{i-1}[f]],$$

porro

$$\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] = \mathrm{B}^k[\mathrm{A}^i[f]],$$
$$\mathrm{A}^l\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] = \mathrm{A}^l[\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f]],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ita ut obtineatur ex. gr. expressio

$$\mathrm{B}^m \mathrm{A}^l \mathrm{B}^k \mathrm{A}^i [f],$$

si functio f subjicitur i vicibus iteratis operationi primae, expressio proveniens k vicibus iteratis operationi secundae, expressio proveniens l vicibus iteratis rursus operationi primae, expressio proveniens m vicibus iteratis rursus operationi secundae. His positis supponamus, expressionem

$$C_i = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$$

identice evanescere pro quolibet ipsius i valore, erit identice, quaecunque sit f functio,

$$\mathrm{AB}[f] = \mathrm{BA}[f],$$

sive duarum operationum ordo interverti potest. Unde deduci potest theorema generale *expressionem*

$$\mathrm{B}^m \mathrm{A}^l \mathrm{B}^k \mathrm{A}^i [f]$$

eandem evasuram, quicunque sit operationum ordo.

Ad demonstrandam propositionem praecedentem generalem, observo, fieri

$$\begin{aligned} \mathrm{B}^k \mathrm{A}[f] &= \mathrm{B}^{k-1}\mathrm{BA}[f] \quad = \mathrm{B}^{k-1}\mathrm{AB}[f] \\ &= \mathrm{B}^{k-2}\mathrm{BAB}[f] = \mathrm{B}^{k-2}\mathrm{AB}^2[f] \\ &= \mathrm{B}^{k-3}\mathrm{BAB}^2[f] = \mathrm{B}^{k-3}\mathrm{AB}^3[f] \\ &= \mathrm{B}^{k-4}\mathrm{BAB}^3[f] \ldots = \mathrm{BAB}^{k-1}[f] \\ &= \mathrm{AB}^k[f]. \end{aligned}$$

Unde

$$\begin{aligned} \mathrm{B}^k \mathrm{A}^i[f] &= \mathrm{B}^k \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{i-1}[f] \quad = \mathrm{AB}^k \mathrm{A}^{i-1}[f] = \mathrm{AB}^k \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{i-2}[f] \\ &= \mathrm{AAB}^k \mathrm{A}^{i-2}[f] = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^k \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{i-3}[f] \\ &= \mathrm{A}^2\mathrm{AB}^k\mathrm{A}^{i-3}[f] = \mathrm{A}^3\mathrm{B}^k \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{i-4}[f] \ldots \\ &= \mathrm{A}^{i-1}\mathrm{B}^k\mathrm{A}[f] \quad = \mathrm{A}^{i-1}\mathrm{AB}^k[f] = \mathrm{A}^i\mathrm{B}^k[f]. \end{aligned}$$

Hinc etiam eruitur

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^l\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] &= \mathrm{A}^l\mathrm{A}^i\mathrm{B}^k[f] \quad = \mathrm{A}^{i+l}\mathrm{B}^k[f] \quad = \mathrm{B}^k\mathrm{A}^{i+l}[f] \\ \mathrm{B}^m\mathrm{A}^l\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] &= \mathrm{B}^m\mathrm{B}^k\mathrm{A}^{i+l}[f] = \mathrm{B}^{m+k}\mathrm{A}^{i+l}[f] \\ &= \mathrm{A}^{i+l}\mathrm{B}^{m+k}[f]. \end{aligned}$$

. . . . . .

Unde propositio demonstranda patet.

Formula §. antecedente inventa alia via confirmatur.

24.

Propositio inventa, si $C_i = 0$, pro quolibet ipsius i valore, fieri

$$\mathrm{AB}[f] = \mathrm{BA}[f]$$

his considerationibus confirmatur. Sint $x_1, x_2, \ldots x_n$ functiones duarum variabilium t et u, quae in ipsa f neque in ipsis A_i, B_i praeterea non inveniantur explicite. Quas functiones supponamus determinari per aequationes:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = A_1, & \frac{\partial x_2}{\partial t} = A_2, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t} = A_n, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} = B_1, & \frac{\partial x_2}{\partial u} = B_2, & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u} = B_n. \end{cases}$$

Quae aequationes, ut locum habere possint, fieri debet pro quolibet ipsius i valore:

$$(2.) \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial A_i}{\partial u} = C_i = 0.$$

Sequitur autem e (1.):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{A}[f], \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \mathrm{B}[f],$$

unde etiam

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial u} = \mathrm{BA}[f], \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial t} = \mathrm{AB}[f].$$

Quae expressiones, quum differentiationum secundum t et u institutarum ordo inverti possit, inter se aequales existunt. Quod est theorema propositum.

De usu formulae inventae in integratione aequationum differentialium partialium linearium.

25.

Antecedentibus erat f functio quaecunque. Iam supponamus, esse f integrale aequationis

$$(1.) \quad 0 = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

sive esse f functionem talem, ut identice habeatur

$$\mathrm{A}[f] = 0.$$

Iam, *si rursus* $B_1, B_2, \ldots B_n$ *sunt functiones ipsarum* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *tales*

ut pro quolibet ipsius i valore, identice sit

$$0 = C_i = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n},$$

sequitur e propositione demonstrata, etiam functionem

$$\mathrm{B}[f] = B_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + B_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

esse aequationis (1.) *integrale, sive generalius functionem* $\mathrm{B}^m[f]$. Quippe quod ut fiat, identice esse debet

$$\mathrm{AB}^m[f] = 0.$$

Sed quum sint quantitates $C_i = 0$, fit identice

$$\mathrm{AB}^m[f] = \mathrm{B}^m\mathrm{A}[f],$$

quae expressio identice evanescit, quum ex hypothesi expressio $\mathrm{A}[f]$ identice evanescat.

Fieri potest, ut expressio $\mathrm{B}[f]$ et ipsa identice evanescat sive constanti aequalis evadat. Quod vero si locum non habet, cognitis ipsis $B_1, B_2, \ldots B_n$ e quovis integrali aequationis (1.) $\varphi = f$ alterum $\varphi = \mathrm{B}[f]$ deduci potest, ex hoc, posito novo integrali in locum prioris, tertium $\varphi = \mathrm{B}^2[f]$ et ita porro. Sed quum constet aequationem (1.) plura quam $n-1$ integralia non habere a se independentia, habemus propositionem,

si pro quovis ipsius i valore sit

$$0 = A_1\frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1\frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n\frac{\partial A_i}{\partial x_n},$$

atque

$$0 = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \mathrm{A}[f],$$

inter functiones f, $\mathrm{B}[f]$, $\mathrm{B}^2[f]$, $\ldots$ $\mathrm{B}^{n-1}[f]$ *unam vel plures aequationes dari, quas ipsae* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *non ingrediuntur.*

Antecedentium in aequationes problematis propositi applicatio. Theorema generale expressiones $[\varphi, \psi]$ *concernens.*

26.

Iam ipsis $A_1, A_2, \ldots A_n, B_1, B_2, \ldots B_n$ valores quosdam tribuamus particulares, quibus fit, ut expressiones C_i omnes ejusdem functionis evadant

differentialia partialia. Quam deinde expressionem si evanescere statuimus, etiam ipsae C_i pro omnibus ipsius i valoribus evanescunt, quae est conditio requisita. Initio autem generaliorem propositionem condam. In finem propositum pono

$$n = 2m,$$

atque in loco variabilium independentium $x_1, x_2, \ldots x_n$ introduco systema duplex variabilium

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m,$$
$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m,$$

atque statuo:

$$\mathrm{A}[f] = A_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + A_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} + A_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + A_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + A_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\mathrm{B}[f] = B_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + B_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} + B_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + B_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m};$$

tandem sit:

$$\mathrm{AB}[f] - \mathrm{BA}[f] = \mathrm{C}[f] = C_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + C_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + C_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m} + C_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + C_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + C_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}.$$

His positis, fit

$$C_i^0 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^0}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} \right\},$$

$$C_i^1 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^1}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^1}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^1}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^1}{\partial p_k} \right\},$$

siquidem ipsi k sub signo Σ valores 1, 2, ... m tribuuntur. Iam ut expressiones sub signo Σ evadant differentialia partialia ejusdem expressionis, statuo

$$A_k^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \quad A_k^1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k},$$

$$B_k^0 = \frac{\partial \psi}{\partial p_k}, \quad B_k^1 = -\frac{\partial \psi}{\partial q_k},$$

unde

$$A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k}}{\partial p_i}.$$

Unde etiam permutando A et B, φ et ψ fit:

$$B_k^0 \frac{\partial A_i^0}{\partial q_k} - A_k^1 \frac{\partial B_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k}}{\partial p_i},$$

ideoque

$$C_i^0 = -\frac{\partial \sum_k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial p_i}.$$

Permutando p et q, unde simul permutari debent A et A^1, B et B^1, mutatur etiam C_i^0 in C_i^1. Unde formula praecedens suppeditat permutando p et q:

$$C_i^1 = \frac{\partial \sum_k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial q_i}.$$

Designabo sequentibus per $[f, \varphi]$ *expressionem sequentem:*

$$[f, \varphi] = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m},$$

unde erit

$$[f, f] = 0. \quad [f, \varphi] = -[\varphi, f].$$

Qua introducta notatione iam erit pro iis, quos ipsis A_i, B_i, A_i^1, B_i^1 valores tribuimus:

$$\mathrm{A}[f] = [f, \varphi],$$
$$\mathrm{B}[f] = [f, \psi],$$
$$\mathrm{AB}[f] = [[f, \psi], \varphi],$$
$$\mathrm{BA}[f] = [[f, \varphi], \psi].$$

Porro

$$C_i^0 = -\frac{\partial [\varphi, \psi]}{\partial p_i}, \qquad C_i^1 = \frac{\partial [\varphi, \psi]}{\partial q_i}.$$

Quibus substitutis valoribus fit

$$\mathrm{C}[f] = [[\varphi, \psi], f].$$

Unde tandem formula supra inventa

$$\mathrm{AB}[f] - \mathrm{BA}[f] = \mathrm{C}[f]$$

in hanc abit:

$$[[f, \psi], \varphi] - [[f, \varphi], \psi] = [[\varphi, \psi], f],$$

quae concinnius sic exhibetur:

$$[[f, \varphi], \psi] + [[\varphi, \psi], f] + [[\psi, f], \varphi] = 0,$$

sive habetur:

Theorema V.

Generaliter designetur, quaecunque sint R *et* S *ipsarum* $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ *functiones, per signum* $[R, S]$ *haec expressio:*

$$[R,S] = \frac{\partial R}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial p_1} + \frac{\partial R}{\partial q_2}\frac{\partial S}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_m}\frac{\partial S}{\partial p_m} - \frac{\partial R}{\partial p_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} - \frac{\partial R}{\partial p_2}\frac{\partial S}{\partial q_2} - \dots - \frac{\partial R}{\partial p_m}\frac{\partial S}{\partial q_m},$$

ponatur

$$[\varphi, \psi] = F, \quad [\psi, f] = \Phi, \quad [f, \varphi] = \Psi,$$

erit identice:

$$[F, f] + [\Phi, \varphi] + [\Psi, \psi] = 0.$$

Quod est gravissimum theorema.

De systemate aequationum differentialium vulgarium, quod aequationi $[f, \varphi] = 0$ *respondeat, de eiusque tertio integrali e binis quibuslibet inveniendo.*

27.

Sit f data functio, erit aequatio

$$[f, \varphi] = 0$$

aequatio differentialis partialis, cui functio φ satisfacere debet. Atque notum est, obtineri omnes functiones φ aequationi

$$(1.) \quad \begin{cases} 0 = [f, \varphi] = \dfrac{\partial f}{\partial q_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \dots - \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \end{cases}$$

satisfacientes, si quaeruntur integralia systematis aequationum differentialium vulgarium sequentis:

$$(2.) \quad \begin{cases} dp_1 : dp_2 : \dots : dp_m : \quad dq_1 : \quad dq_2 : \dots : \quad dq_m = \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_1} : \dfrac{\partial f}{\partial q_2} : \dots : \dfrac{\partial f}{\partial q_m} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} : \dots : -\dfrac{\partial f}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quoties enim huius systematis aequationum differentialium vulgarium integrale quodcunque est

$$\varphi = \text{Const.},$$

erit φ functio aequationi (1.) satisfaciens. Iam sit

$$\psi = \text{Const.}$$

alterum integrale quodcunque aequationum (2.), erit identice:

$$[f, \varphi] = 0, \quad [f, \psi] = 0,$$

sive si notationem §. antecedentis adhibitam rursus adhibemus:

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{P} = 0.$$

Hoc autem casu aequatio identica theoremate V. proposita in hanc abit:

$$[f, F] = 0,$$

Unde sequitur, aequationum (2.) integrale quoque esse

$$F = [\varphi, \psi] = \text{Const.};$$

sive habetur

Theorema VI.

Sint

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

duo integralia quaecunque aequationum:

$$dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : \quad dq_1 : \quad dq_2 : \cdots : \quad dq_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial q_1} : \frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_m} : -\frac{\partial f}{\partial p_1} : -\frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

erit aequatio:

$$\text{Const.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$$

tertium integrale eiusdem aequationum differentialium vulgarium systematis.

Dilucidationes circa theorema §. antecedente propositum.

28.

Antecedentibus evenire potest, ut functio $[\varphi, \psi]$ in quantitatem constantem sive generalius in ipsarum φ et ψ functionem abeat, quo casu e duobus integralibus inventis tertium ratione quam theoremate praecedente indicavi non derivatur. Sed observo, hos casus tantum ut exceptionales considerandos esse. Generaliter dicere debemus *e duobus integralibus aequationum:*

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial U}{\partial p_1} : \frac{\partial U}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial U}{\partial p_m} : -\frac{\partial U}{\partial q_1} : -\frac{\partial U}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial U}{\partial q_m}$$

deduci posse per solas differentiationes tertium, ex hoc combinato cum duobus propositis quartum et quintum, etc. etc., ita ut e datis duobus integralibus per solas operationes differentiationis per partes cuncta deducantur propositi aequationum differentialium vulgarium systematis integralia. Scilicet, si aequa-

tionum propositarum integralia, quorum numerus $2m-1$, haec sunt:

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \ldots \quad u_{2m-1} = a_{2m-1},$$

designantibus a_1, a_2, $\ldots$ a_{2m-1} constantes arbitrarias, quae ipsas functiones u_1, u_2, $\ldots$ u_{2m-1} non ingrediuntur, erit expressio *generalis* duorum integralium:

$$\Theta\,(u_1, u_2, \ldots u_{2m-1}) = \text{Const.},$$

$$\Theta_1(u_1, u_2, \ldots u_{2m-1}) = \text{Const.}$$

Ac, nisi functionibus Θ, Θ_1 formae quaedam particulares conciliantur, semper eveniet, ut ex his duobus integralibus

$$\Theta = \text{Const.}, \quad \Theta_1 = \text{Const.}$$

per methodum theoremate praecedente propositam identidem repetitam cuncta integralia proveniant. Ac reapse semper infinitis modis bina ejusmodi integralia, $\Theta = \text{Const.}$, $\Theta_1 = \text{Const.}$, assignare licet, e quibus per operationes propositas cuncta reliqua derivari possunt. Id quod eo majoris momenti est, quum systema aequationum differentialium vulgarium propositum idem est, cuius integratio motum suppeditat numeri cuiuslibet punctorum materialium, quae viribus quibuscunque attractionum seu repulsionum sollicitantur, ac praeterea quibuscunque conditionibus subiecta sunt. Ad theoremata antecedentia V. et VI. perveni necessitate quadam coactus, dum inquirerem, quinam sit aequationum (α.) §. 11 habitus et quaenam compositio, quibus eveniat, ut omnibus simul una eademque functione p_{i+1} satisfacere liceat. Nam hoc fieri posse aliunde constabat, quum satis notum esset, extare functionem V aequationi differentiali partiali propositae satisfacientem, quae $m-1$ constantes arbitrarias involvat, unde etiam patebat, inveniri posse praeter aequationem illam propositam alias $m-1$ aequationes inter quantitates q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m, totidem constantes arbitrarias involventes. Hinc rursus concludis, semper dari functionem p_{i+1} aequationibus (α.) omnibus simul satisfacientem eamque continere posse constantem arbitrariam. Inquirens autem in conditiones possibilitatis eiusmodi integrationis simultaneae quum ad theorema fundamentale VI. delapsus essem, ingenue fateor, theorema illud me per aliquod tempus pro invento plane novo habuisse. Quid enim magis mirum fingi potest ac paene fidem superans, quam quod inde sequitur et mox videbimus, *in omnibus problematibus mechanicis, in quibus virium vivarum conservatio locum habet, generaliter e duobus integralibus praeter principium illud inventis reliqua omnia absque ulla ulteriore*

integratione inveniri posse? Hoc theorema quomodo notum crederes, quum in nullo Tractatu Mechanico, in nullo Tractatu Analytico, in quo de integratione aequationum differentialium agitur, reperiatur, quum tamen ubique tamquam summum Calculi Integralis inventum circumferri deberet. Attamen inventum illud — ipso nescio auctore dicam? — inde ab annis novem et viginti *) factum est ab ill. *Poisson*, quippe quod prorsus idem est atque propositio illa, in formulis eius perturbatoriis, quibus differentialia elementorum perturbatorum lineariter exprimuntur per differentialia partialia functionis perturbatricis respectu elementorum sumta, coefficientes per quos differentialia illa partialia functionis perturbatricis multiplicantur, et quorum formatio eadem atque expressionum $[\varphi, \psi]$ a viro ill. inventa est, a tempore t liberos esse sive solorum elementorum esse functiones. Quae propositio vix pro nova et memorabili habebatur: nam quum formulae perturbatoriae *Lagrangianae* et *Poissonianae* aliae aliarum inversae sint et quum de suis formulis ill. *Lagrange* iam coefficientium a tempore independentiam demonstrasset, res sponte de *Poissonianis* formulis patebat seu certe mathematicis nihil habere videbatur, quod admirationem movere possit. Scilicet sola formatio differentialium elementorum perturbatorum curabatur, et quum formulae *Lagrangianae* eum in finem commodiores censerentur, formulae *Poissonianae* et propositio illa stupenda nonnisi ut propter demonstrationis difficultatem memorabiles obiter citabantur. Nemo, quantum scio, suscepit, propositionem illam per se examinare, nullo ad theoriam perturbationum respectu habito, quod si quis fecisset, fugere eum non potuisset, quantum sit eius in tractando *imperturbato* problemate momentum, eamque esse totius Mechanicae Analyticae gravissimam propositionem cuius analoga per totum Calculum Integralem non extat. Ill. *Lagrange* dum in Mech. Anal. (Vol. II, sect. VIII, art. 6) memorat, in formulis perturbatoriis *Poissonianis* coefficientes differentialium partialium functionis perturbatricis a tempore independentes esse, „sed demonstratio directa“ addit, „huius proprietatis singularis fit perdifficilis, uti videre licet in pulchra commentatione Cl. *Poisson* inserta tomo VIII Diarii Scholae Polytechnicae, ac nemo unquam fortasse eam quaesitum ivisset, nisi antea constasset de veritate huius theorematis“. Videmus ipsum summum magistrum

---

*) Commentatio citata lucem vidit mense Decembri anni 1809; unde iam commentationem, quam legis, sub finem anni 1838 scriptam esse conjicis. Quod etiam cum eo consentaneum est, quod formularum quarundam in hac commentatione traditarum in nota mentio fit sub die 21mo mensis Novembris anni 1838 cum Academia scientiarum Berolinensi communicata. Cf. finem §. 70. *C.*

ne suspicatum quidem esse, quid sit id, quod re vera theorema singulare reddat. Habemus hic praeclarum exemplum, nisi animo praeformata sint problemata, fieri posse, ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus. Formaverat ill. *Poisson* e binis integralibus per differentiationes partiales coefficientes formularum, quibus elementorum perturbatorum differentialia exprimuntur, eosque a tempore liberos esse docuit. Sed quum animi mathematicorum toti in formulas perturbatorias intenti essent, huius inventi id tantum ut memorabile notabátur, coefficientes formularum perturbatoriarum a tempore non pendere, non id multo magis admirabile, e binis integralibus per differentiationes partiales formari posse expressionem tertiam a tempore non pendentem. Cuiusmodi tamen expressio generaliter est tertium integrale. Putabatur ea propositio nihil novi suppeditare ultra *Lagrangiana* inventa, quum propositionis *Lagrangianae*, quae tamquam aequivalens considerabatur, in imperturbato problemate omnino nullus usus sit, nisi quod, uti ipse autor eiusmodi usum circumspiciens innuit, eius propositionis ope examinare liceat, an inventae expressiones coordinatarum per elementa et tempus iustae sint. At propositio, ad quam differentialia elementorum perturbatorum directe quaerens pervenit ill. *Poisson*, summi momenti est in indagandis ipsis problematis imperturbati integralibus, eique tamquam fundamento superstruere contingit theoriam plane novam integrationis problematum mechanicorum, in quibus principium conservationis virium vivarum valet, ac generalius omnium problematum, quae ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocari possunt, ad quae demonstrari potest etiam problemata *isoperimetrica* maxime generalia pertinere. Et quamvis fere totum hoc opusculum illo innitatur fundamento ac maxime versetur in enucleandis proprietatibus functionum $[\varphi, \psi]$, quae tertium integrale formatum e duobus propositis sive coefficientes formularum perturbatoriarum ab ill. *Poisson* traditarum suppeditant: tamen longe abesse credo, ut omnia exhauriat, quae ex hoc fonte in integrationem aequationum differentialium *dynamicarum* redundare possint, immo plurima gravissima curas posteriores exspectant.

Quum omnibus casibus et utile sit nec elegantia careat, propositiones omnes ad meras identitates revocare, theorema VI. tamquam Corollarium deduxi de aequatione identica nova et simplicissima, quam theoremate V. proposui et quae ad alias quoque quaestiones usui esse potest. Revertimur ad propositum.

Demonstratio theorematis IV.

29.

Ex theoremate VI. deducamus theorema IV., quod demonstratu propositum est, et quo nova methodus nostra aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium integrandi innitebatur.

Docet theorema VI., si identice sit:

$$[f, q] = 0, \qquad [f, \psi] = 0,$$

fore etiam identice

$$[f, [\varphi, \psi]] = 0.$$

Unde etiam permutando φ et f sequitur, *si identice sit*

$$[\varphi, f] = 0, \qquad [\varphi, \psi] = 0,$$

fore etiam

$$[\varphi, [f, \psi]] = 0.$$

Designantibus $\varkappa$ et λ binos quoscunque e numeris 1, 2, 3, ... i inter se diversos, statuamus, functionem f e variabilibus $q_1, q_2, \ldots q_i, p_1, p_2, \ldots p_i$ tantum continere duas $q_\varkappa$, q_λ, ac praeterea functioni φ adhuc terminum $-p_\varkappa$, functioni ψ terminum $-p_\lambda$ additione iunctum esse, ita ut sit:

$$\frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda} = -1.$$

Hinc erit

$$(1.) \quad \begin{cases} [\varphi, f] = \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

$$(2.) \quad \begin{cases} [\psi, f] = \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\lambda} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

porro

$$(3.) \quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+2}} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+2}} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Quibus ipsarum

$$[\varphi, f], \quad [\psi, f], \quad [\varphi, \psi]$$

valoribus substitutis, docet propositio praecedens, *designantibus* φ *et* ψ *tales ipsarum* q_z, q_λ, q_{i+1}, q_{i+2}, $\ldots$ q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, $\ldots$ p_m *functiones, quae satisfaciant aequationi:*

$$0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial q_z}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m},$$

ubi sit

$$f = F$$

integrale aequationis:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial F}{\partial p_m}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial q_z}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial F}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial F}{\partial q_m},$$

fore expressionem

$$F = \frac{\partial\psi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}}-\cdots-\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

eiusdem aequationis alterum integrale. Quod est theorema IV., siquidem loco φ et ψ scribitur p_z et p_λ atque φ loco F. Unde iam, quae demonstranda restabant, demonstrata sunt.

Quum antecedentia forma quarta conditionum integrabilitatis innitantur, iam ut problema variis rationibus condatur, reditur ad formam primam.

30.

Methodo integrationis propositae dilucidationes addam.

Sit

$$f = a,$$

designante a constantem, aequatio differentialis partialis proposita; inventae sunt per methodum propositam aequationes

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1},$$

e quibus propositae iunctis, determinandae erant p_1, p_2, $\ldots$ p_m ut ipsarum q_1, q_2, $\ldots$ q_m functiones. Eratque

f functio ipsarum $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_1 functio ipsarum $a, p_2, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_2 functio ipsarum $a, a_1, p_3, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_3 functio ipsarum $a, a_1, a_2, p_4, \ldots\ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
. . . . . .
f_{m-2} functio ipsarum $a, a_1, \ldots a_{m-3}, p_{m-1}, p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$,
f_{m-1} functio ipsarum $a, a_1, \ldots a_{m-3}, a_{m-2}, p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$.

Quantitates $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae, a est constans data, quam nullitati aequiparare licet, quam tamen uniformitatis gratia conservo. Determinatis ex aequationibus

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ \ldots \ f_{i-1} = a_{i-1}$$

ipsis $p_1, p_2, \ldots p_i$ per $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, functio f_i numero i aequationum $(d.)$ §. 17 identice satisfaciebat, unde etiam functio p_{i+1}, ex aequatione $f_i = a_i$ expressa per $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, satisfaciebat i aequationibus $(\alpha.)$ §. 11. At si ope aequationum

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad \ldots \quad f_{i-1} = a_{i-1}$$

non $p_1, p_2, \ldots p_i$ per reliquas quantitates $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$, sed, quemadmodum in theoremate I. §. 6 factum est, e primis i quantitatum

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$$

unaquaeque per insequentes exhibetur, ita ut ex aequatione $f = a$ exprimatur p_1 per p_2, p_3 etc., e $f_1 = a_1$ exprimatur p_2 per p_3, p_4 etc., e $f_2 = a_2$ exprimatur p_3 per p_4, p_5 etc.: tum vidimus initio huius commentationis numerum i aequationum $(\alpha.)$ cum totidem convenire sequentibus:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_3} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \quad + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ 0 = -\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_3} + \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_4} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \quad + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = -\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ \quad + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quae sunt ipsae aequationes ($a.$) in theoremate I. propositae, siquidem in theoremate illo statuitur $k = i+1$ atque loco i successive ponuntur numeri $1, 2, 3, \ldots i$. E quibus ipsis aequationibus ($a.$) supra aequationes ($\alpha.$) deductae sunt.

Introductis functionibus f, quae in solutione problematis singulae constantibus aequantur, aequationibus supra adhibitis forma communis $[f_i, f_k] = 0$ *conciliatur.*

31.

Multiplicemus i aequationes praecedentes per

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_1}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i},$$

atque sola in eas differentialia partialia functionum $f, f_1, f_2, \ldots f_i$ introducamus, quod per aequationes $f = a$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, $\ldots$ $f_i = a_i$ licet. Quo facto induent aequationes praecedentes hanc formam:

$$(a'.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f}{\partial p_3}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_3} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ 0 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_3} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_4} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_i} + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial f_{i-1}}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Quum functiones f_k quantitates $p_1, p_2, \ldots p_k$ non involvant, has aequationes omnes in eandem formam redigere licet sequentem:

$$(a''.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \quad - \dfrac{\partial f}{\partial q_1}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_1} - \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ 0 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1}\dfrac{\partial f_i}{dq_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial q_m} \\ \quad - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\

aequivalens substituitur f_n. Si n unus e numeris k, $k+1$, ... $i-1$, altera functio f_k constantem a_n non continet, quo igitur casu in demonstratione praecedente ponendum est $\frac{\partial f_k}{\partial a_n} = 0$, sive termini in $\frac{\partial f_k}{\partial a_n}$ multiplicati rejiciendi.

Prorsus eadem ratione demonstratur, aequationem

$$[f_i, f_n] = 0$$

immutatam manere, si in altera functionum f_i, f_k retineatur a_n, in altera in locum eius functio f_n substituatur.

Si eodem modo cum reliquis constantibus arbitrariis agis, quas functiones f_i, f_k involvunt, deducis propositionem generalem: *aequationes*

$$[f_i, f_k] = 0$$

adhuc valere, si in altera aut in utraque functione f_i, f_k ante differentiationes partiales instituendas in locum unius vel plurium vel omnium constantium arbitrariarum, quas continent, functiones aequivalentes substituantur, seu generalius, quascunque mutationes functiones f_i, f_k ante differentiationes partiales factas auxilio aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, ... $f_{m-1} = a_{m-1}$ subeant. Quae propositio etiam e theoremate II. §. 12 derivari potuisset.

E forma allata aequationes §. 14 $[H_i, H_k] = 0$ denuo obtinentur. Systema aequationum differentialium vulgarium, cuius aequationes $H_i = Const.$ sunt integralia.

32.

Si in aequationibus

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

e quaque functione f_i ope aequationum

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{i-1} = a_{i-1}$$

constantes a, a_1, a_2, ... a_{i-1}, quas f_i continet, eliminantur atque functio inde proveniens vocatur

$$H_i = f_i,$$

obtinemus aequationes

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

in quibus H_i sunt functiones ipsarum p_1, p_2, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m absque ullis constantibus arbitrariis. Pro illis autem functionibus aequationes

$$[H_i, H_k] = 0$$

identicae evadere debent, quum expressio ad laevam nullam constantem arbitrariam contineat. Quas aequationes supra §. 14. iam dedi, ubi H_i, h_i loco H_{i-1}, a_{i-1} scriptum erat. Adhibitis functionibus H propositio antecedens sic enunciari potest:

valere aequationem

$$[H_i, H_k] = 0,$$

quaecunque variabilium p_1, p_2, *etc. e functionibus* H_i, H_k *ope aequationum* $H = a$, $H_1 = a_1$, ... $H_{m-1} = a_{m-1}$ *ante differentiationes partiales instituendas eliminatae sint, sive quascunque mutationes ope harum aequationum functiones* H_i, H_k *subierint.*

Ex aequationibus

$$[H, H_1] = 0, \quad [H, H_2] = 0, \quad \ldots \quad [H, H_{m-1}] = 0$$

sequitur, aequationes

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

esse m integralia systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

in quibus H eadem est functio, quam supra f vocavi. Unde etiam aequationes

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots \quad f_{m-1} = a_{m-1},$$

quae cum aequationibus illis conveniunt, tamquam systema m aequationum integralium systematis aequationum differentialium vulgarium praecedentis considerari possunt. Sed quum systema hoc habeat $2m-1$ integralia, restat ut reliqua $m-1$ indagentur. Eum in finem observo sequentia.

Systematis aequationum differentialium vulgarium propositi reliqua integralia investigantur.

33.

Aequationes $f = a$, $f_1 = a_1$, ... $f_{m-1} = a_{m-1}$ sive aequationes $H = a$, $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, ... $H_{m-1} = a_{m-1}$ ita formatae sunt, ut, expressis earum beneficio ipsis p_1, p_2, ... p_m per q_1, q_2, ... q_m, expressio

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

evadat differentiale completum. Valores illi ipsarum p_1, p_2, ... p_m praeter variabiles q_1, q_2, ... q_m adhuc involvunt constantem a et constantes arbitrarias a_1, a_2, ... a_{m-1}. Secundum quarum unam a_i, si expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

differentiamus, prodibit expressio

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m,$$

quae et ipsa differentiale completum esse debet. Iam vero ex aequatione

$$f = a,$$

quae est aequatio differentialis partialis proposita, sequitur differentiando secundum a_i:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a_i}=0.$$

Unde ex aequationibus differentialibus vulgaribus propositis

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m = \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_m}$$

deducere possumus aequationem:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_i}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_i}dq_m=0,$$

in qua est expressio ad laevam differentiale completum. Quo integrato positisque in locum ipsius a_i valoribus ejus $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, prodeunt $m-1$ integralia nova quaesita:

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_1}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_1}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_1}dq_m\right\}=b_1,$$

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_2}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_2}dq_m\right\}=b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int\left\{\frac{\partial p_1}{\partial a_{m-1}}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_{m-1}}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_{m-1}}dq_m\right\}=b_{m-1},$$

in quibus sunt $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ constantes novae arbitrariae.

Systema aequationum differentialium vulgarium ita propositum est, ut differentialia variabilium datis quantitatibus existant proportionalia. Fingatur differentiale auxiliare dt, cuius ope quantitates proportionales evadant inter se aequales, unde systema propositum fit:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_2},\quad \ldots\quad \frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \ldots\quad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_m}.$$

Hinc fit

$$\frac{\partial p_1}{\partial a}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial a}dq_m$$
$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a}\right\}dt.$$

At differentiando aequationem propositam $f=a$ secundum a prodit:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a}=1.$$

unde aequatio antecedens abit in sequentem:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a}\,dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial a}\,dq_m = dt,$$

cuius pars ad laevam est differentiale exactum. Hinc videmus, ut quantitas auxiliaris t obtineatur per solas quadraturas, non esse necessarium, ut omnes quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per unam ex earum numero exprimantur, atque tum ex una aequationum differentialium propositarum, ex. gr. ex aequatione

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}$$

valor ipsius t per quadraturam eruatur, sed expressis $p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, $\ldots$ $f_{m-1} = a_{m-1}$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$, haberi t per aequationem

$$t + b = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a}\,dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a}\,dq_m \right\},$$

in qua b est nova constans arbitraria.

De antecedentibus theorema conditur. Designatis illis quae desiderabantur integralibus per $f_i' = b_i$, vel $H_i' = b_i$, expressionum $[H_i, H_k']$, $[H_i', H_k']$ valores indagantur.

34.

Si V est integrale aequationis differentialis partialis propositae,

$$f(q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m) = a,$$

quale invenitur per aequationem

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\},$$

in qua $p_1, p_2, \ldots p_m$ ope aequationum $f = a$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, $\ldots$ $f_{m-1} = a_{m-1}$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ expressae sunt, licet integralia aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

hoc modo repraesentare,

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = t + b,$$

in quibus a, a_1, a_2, ... a_{m-1}, b, b_1, b_2, ... b_{m-1} *sunt* $2m$ *constantes arbitrariae.* Unde integratio completa est.

Theorema praecedens gravissimum, iam olim a me demonstratum, est amplificatio alius theorematis ab ill. *Hamilton* inventi, quo primus aequationes differentiales vulgares dynamicas ad aequationes differentiales partiales revocavit. Sed ille binas simul adhibuit aequationes differentiales partiales, quo praeter necessitatem problema intricabatur. Eratque eo tempore integratio aequationis differentialis partialis $f = a$ problema multo difficilius et quod multo plures postulabat integrationes quam integratio systematis aequationum differentialium vulgarium, quae simul sunt aequationes differentiales dynamicae

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Qua de re tum temporis vir ill. multo magis aequationum differentialium partialium integrationem quam dynamicam promovisse existimandus erat. Neque vero viri illustris merito derogatum esse volo. Summum enim videtur quum in omni scientia tum in analysi mathematica nexus novus patefactus inter ea, quae nullo vinculo videbantur coniuncta.

Statuamus, designante i unum quemlibet e numeris 0, 1, 2, ... $m-1$:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m \right\} = f_i',$$

et quemadmodum supra (§. 32.) suppositum est, e functione f_{i-1} prodire functionem H_{i-1}, si in functione illa loco constantium a, a_1, a_2, ... a_{i-2}, quas continet, ponantur functiones H, H_1, H_2, ... H_{i-2}, ita iam supponamus, e functionibus f_{i-1}' prodire functiones H_{i-1}', si loco constantium a, a_1, a_2, ... a_{m-1}, quas continent, ponantur respective functiones H, H_1, H_2, ... H_{m-1}, ita ut etiam m functiones H_1', H_2', ... H_{m-1}' sint ipsarum q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m functiones, constantes a, a_1, ... a_{m-1} non continentes. Designantibus i, k binos quoslibet e numeris 0, 1, 2, ... $m-1$, erat *identice*

$$[H_i, H_k] = 0;$$

iam valorem expressionum

$$[H_i, H_k']$$

investigemus.

Ac primum observo, in expressione illa loco H_k' poni posse functionem f_k', e qua H_k' obtinetur ponendo loco a, a_1, a_2, ... a_{m-1} functiones f, f_1, f_2, ... f_{m-1}. Etenim, si eandem substitutionem facimus, postquam ex-

pressiones $[H_i, f_k']$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a}$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a_1}$, ... $\frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}$ formatae sunt, *identice* fit, sicuti e formatione expressionis $[H_i, H_k']$ facile sequitur:

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] + \frac{\partial f_k'}{\partial a}[H_i, H] + \frac{\partial f_k'}{\partial a_1}[H_i, H_1] + \cdots + \frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}[H_i, H_{m-1}].$$

Unde, expressionibus

$$[H_i, H], \quad [H_i, H_1], \quad [H_i, H_2], \quad \ldots \quad [H_i, H_{m-1}]$$

identice evanescentibus, quum insuper functio f_k' solas $q_1, q_2, \ldots q_m, a, a_1, \ldots a_{m-1}$ neque quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ contineat:

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] = -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial f_k'}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial f_k'}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f_k'}{\partial q_m}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_k} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a_k}\right\}.$$

Unde habetur

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] = -\frac{\partial H_i}{\partial a_k},$$

siquidem in functione H_i in locum variabilium $p_1, p_2, \ldots p_m$ ad formandum differentiale partiale $\frac{\partial H_i}{\partial a_k}$ substituuntur eorum valores, qui obtinentur ex aequationibus:

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

sive erit identice $[H_i, H_k'] = 0$, *quoties* i *et* k *diversi sunt, atque* $= -1$, *si* $i = k$.

Quod attinet ad valores expressionum

$$[H_i', H_k],$$

primum observo, haberi per easdem considerationes, quibus antecedentibus usi sumus,

$$[H_i', H_k'] = [H_i', f_k'],$$

eamque aequationem identicam fieri, si post formatam expressionem $[H_i', f_k']$ in ea loco ipsarum $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ restituamus functiones $H, H_1, \ldots H_{m-1}$. Quod si in fine operationum signis nostris indicatarum efficimus, fit identice:

$$[H_i', f_k'] = [f_i', f_k'] + \frac{\partial f_i'}{\partial a}[H, f_k'] + \frac{\partial f_i'}{\partial a_1}[H_1, f_k'] + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial a_{m-1}}[H_{m-1}, f_k'];$$

porro antecedentibus vidimus, si i et k diversi sint, fieri:

$$[H_i, f_k'] = 0;$$

expressio autem $[f_i', f_k']$ in nihilum abit, quum neque f_i' neque f_k' quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ contineant; unde, si i et k inter se diversi sunt, fit

$$[H_i', H_k'] = [H_i', f_k'] = 0.$$

Aequatio autem $[H_i', H_k'] = 0$, si $i = k$, sponte patet. *Jam igitur aequationum differentialium*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

$2m$ *integralia inventa*

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

$$H' = b + t, \quad H_1' = b_1, \quad H_2' = b_2, \quad \ldots \quad H_{m-1}' = b_{m-1}$$

ita comparata sunt, ut tribuendo ipsis i et k valores 1, 2, 3, ... m, *identice sit:*

$$[H_i, H_k] = 0, \qquad [H_i', H_k'] = 0,$$

ac si i et k inter se diversi sunt,

$$[H_i, H_k'] = 0,$$

denique

$$[H_i, H_i'] = -1.$$

Quae sunt propositiones in theoria nostra *fundamentales.*

De modificatione formularum praecedentium, qua opus est, si functio f ipsam continet variabilem t, quae supra tanquam auxiliaris spectabatur.

35.

Supposuimus, in systemate aequationum propositarum:

$$(1.) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

functionem f ipsas tantum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ neque quantitatem t continere. Sed facile iste casus, quo f etiam t continet, ad praecedentem revocatur. Statuamus enim in praecedentibus variabilibus $q_1, q_2, \ldots q_m$ accedere variabilem t, unde posito

$$\frac{\partial V}{\partial t} = u$$

etiam statuendum erit:

$$(2.) \qquad dV = u\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m.$$

Insuper in aequatione differentiali partiali proposita loco f scribatur $u+f$, ita ut evadat illa:

$$(3.) \qquad u+f=a \quad \text{sive} \quad \frac{\partial V}{\partial t}=-f+a\ ^*),$$

functione f involvente ipsam t neque vero ipsam u. His statutis mutationibus formulae propositae sponte ad casum patent, quo f ipsam t involvit. Nam quum sit

$$\frac{\partial(u+f)}{\partial u}=1, \qquad \frac{\partial(u+f)}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(u+f)}{\partial q_i}=\frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial(u+f)}{\partial p_i}=\frac{\partial f}{\partial p_i},$$

aequationes differentiales vulgares, quarum integrationem vidimus §§. 32, 33 pendere ab integratione aequationis differentialis partialis propositae, hae evadunt:

$$dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad du : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m \quad =$$
$$1 : \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial t} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

quae eaedem sunt atque aequationes (1.), accedente, si placet, aequatione

$$(4.) \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Praeter aequationem propositam $u+f=a$ sint

$$(5.) \qquad f_1=a_1, \quad f_2=a_2, \quad \ldots \quad f_m=a_m$$

integralia aequationum (1.) per methodum a me supra propositam indaganda. E quibus ipsae u, p_1, p_2, $\ldots$ p_m per t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m ita determinantur, ut fiat

$$u\,dt+p_1\,dq_1+p_2\,dq_2+\cdots+p_m\,dq_m$$

expressio integrabilis. Numerus aequationum (5.) unitate maior est atque in quaestionibus praecedentibus, quum variabilibus independentibus q_1, q_2, $\ldots$ q_m accesserit nova variabilis t. Ac per regulam praescriptam erit $f_1=a_1$ integrale quodcunque aequationum (1.); in quibus quum neque u neque constans a obveniat, etiam f_1 neque u neque a continebit, idemque valebit de functionibus f_2, f_3, $\ldots$ f_m. Quarum f_i erit functio ipsarum p_i, p_{i+1}, $\ldots$ p_m, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, a_1, a_2, $\ldots$ a_{i-1}. Si in f_2 loco a_1 restituimus functionem f_1, prodeat $f_2=H_2$; si in f_3 loco a_1, a_2 restituimus functiones f_1, H_2, prodeat $f_3=H_3$, et ita porro. Unde generaliter fit H_i functio ipsarum p_1, p_2, $\ldots$ p_m, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m a constantibus arbitrariis vacua, quae ope aequationum $f_1=a_1$, $f_2=a_2$, $\ldots$ $f_{i-1}=a_{i-1}$

*) Constantem a per totam disquisitionem sequentem etiam $=0$ ponere licet.

ipsi f_i aequalis evadit. In locum igitur aequationum (5.) hae quoque adhiberi possunt:

$$(6.) \qquad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_m = a_m,$$

quae et ipsa erunt aequationum (1.) integralia. Inventis aequationibus (5.) earumque ope expressis f, p_1, p_2, $\ldots$ p_m per quantitates t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, a_1, a_2, $\ldots$ a_m, habentur e §. 34 reliqua integralia aequationum (1.):

$$(7.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left\{ -\dfrac{\partial f}{\partial a_1} dt + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \dfrac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} = b_1, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left\{ -\dfrac{\partial f}{\partial a_2} dt + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \dfrac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_m} = \int \left\{ -\dfrac{\partial f}{\partial a_m} dt + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_m} dq_1 + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_m} dq_2 + \cdots + \dfrac{\partial p_m}{\partial a_m} dq_m \right\} = b_m, \end{cases}$$

designantibus b_1, b_2, $\ldots$ b_m novas constantes arbitrarias.

Aequatio, quae e §. 34 addi potest,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = t + b,$$

hic mere identica evadit; nam quum expressiones ipsarum f, p_1, p_2, $\ldots$ p_m constantem a non contineant, atque sit $u = a - f$, eruimus differentiando (2.) secundum a et integrando:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int dt,$$

quod aequationem praecedentem sponte suppeditat.

Si in functionibus $\frac{\partial V}{\partial a_1}$, $\frac{\partial V}{\partial a_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial V}{\partial a_m}$ loco ipsarum a_1, a_2, $\ldots$ a_m ponimus functiones H_1, H_2, $\ldots$ H_m, functiones inde prodeuntes vocemus rursus H_1', H_2', $\ldots$ H_m'. Tum, pro his functionibus sicuti supra, valebunt aequationes

$$[H_i, H_k] = 0, \qquad [H_i, H_k'] = 0, \qquad [H_i', H_k'] = 0,$$
$$[H_i, H_i'] = -1,$$

si quidem notatione

$$[\varphi, \psi]$$

semper designamus expressionem

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Quamquam enim casu, quem hic consideramus, variabilibus

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

accedunt variabiles

$$t, \quad u,$$

unde videri posset, aequationibus praecedentibus accedere debere terminos e differentiatione secundum has variabiles provenientes: nullo tamen modo in formandis expressionibus

$$[H_i, H_k], \quad [H_i, H_k], \quad [H_i', H_k']$$

opus est, ut habeamus respectum ad variabilem t functiones H_i, H_i' afficientem atque etiam respectu huius differentiationes partiales instituamus. Nam quum functiones H_i, H_i' non contineant ipsam u, evanescunt termini, qui addendi forent,

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial u} - \frac{\partial H_k}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u}.$$

Si ponitur

$$u + f = H,$$

solis expressionibus

$$[H, H_i], \quad [H, H_i']$$

termini accedunt provenientes e differentiatione respectu ipsarum t, u instituta. Habetur enim, quum f ipsam u non involvat,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1,$$

unde termini addendi valores obtinent sequentes:

$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u} - \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u} - \frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i'}{\partial t}.$$

Unde sequitur:

$$[H, H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = [f, H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = 0,$$

$$[H, H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = [f, H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = 0.$$

Quae formulae etiam inde deducuntur, quod sint aequationes

$$H_i = \text{Const.}, \qquad H_i' = \text{Const.}$$

integralia aequationum differentialium propositarum,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

ita ut, substitutis his aequationibus, identice fiat

$$\frac{dH_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dH_i'}{dt} = 0,$$

quod formulas praecedentes suppeditat. Si ponimus analogiam notationis adhibitae servantes

$$t = \frac{\partial V}{\partial a} = H',$$

manent aequationes

$$[H', H_i] = 0, \qquad [H', H_i'] = 0,$$

quum functiones H', H_i, H_i' ipsam u non involvant, ideoque termini addendi evanescant. Quod attinet ad expressionem

$$[H, H'],$$

observo eam evanescere, quia H' nullam contineat variabilium

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

sed unicam t.

Applicatio in aequationes dynamicas. Quae sub Lagrangiana forma proponuntur.

36.

In formam aequationum differentialium vulgarium propositarum

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

aequationes differentiales dynamicas revocari posse omnibus casibus, quibus principium minimae actionis sive principium conservationis virium vivarum locum habeat, primus, quantum scio, ill. *Hamilton* docuit. Adstruam primum formulas dynamicas generales *Lagrangianas* ex iisque deinde formulas propositas deducam.

Proponantur n puncta materialia, quorum massae m_1, m_2, ... m_n; sint x_i, y_i, z_i coordinatae orthogonales puncti, cuius massa m_i; ac sollicitetur punctum illud secundum directiones axium coordinatarum viribus X_i, Y_i, Z_i, erunt problemata mechanica, quae hic consideramus et pro quibus dicta principia valent, ea, in quibus expressio

$$\Sigma m_i \{X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i\},$$

extensa ad omnia n corpora, est differentiale completum. Cuius integrale si

vocatur U, erunt aequationes differentiales dynamicae contentae hac aequatione symbolica

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \delta U,$$

cui satisfieri debet per variationes omnes virtuales δx_i, δy_i, δz_i, sive per variationes conditiones non turbantes, quibus n puncta materialia subiecta sunt. Id quod docuit olim ill. *Lagrange* combinando principium *d'Alemberti* cum principio velocitatum virtualium. Posito autem

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

fit aequatio illa symbolica:

$$\frac{d\Sigma m_i\{x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i\}}{dt} - \Sigma m_i\{x_i'\delta x_i' + y_i'\delta y_i' + z_i'\delta z_i'\} = \delta U,$$

quae, posita semissi virium vivarum

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\{x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i'\} = T,$$

sic etiam repraesentari potest:

$$\frac{d\Sigma m_i\{x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i\}}{dt} = \delta(U+T).$$

Statuendo $U+T=R$, hanc aequationem ita exhibeamus:

$$\delta R = \frac{d\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i \right\}}{dt},$$

id quod licet, quum U quantitates x_i', y_i', z_i' omnino non contineat. Exprimamus $3n$ quantitates x_i, y_i, z_i per m alias quantitates q_1, q_2, ... q_m sitque rursus

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt},$$

facile probatur expressa etiam R per q_1, q_2, ... q_m, q_1', q_2', ... q_m' fieri:

$$(1.) \quad \begin{cases} \Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i \right\} = \\ \quad \frac{\partial R}{\partial q_1'}\delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'}\delta q_m . \end{cases}$$

Habetur enim

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i \right\} =$$

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right\} \delta q_1 +$$

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right\} \delta q_2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} \delta q_m .$$

At quum sit

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_m} q_m',$$

erit

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \text{ ac similiter } \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

unde

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right\} =$$

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} \right\} = \frac{\partial R}{\partial q_k'},$$

ideoque

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i \right\} = \Sigma_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} \delta q_k,$$

quod probandum erat. Habemus igitur, expressa R per novas quantitates q_k, q_k', aequationem

$$\delta R = \frac{d \left\{ \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m \right\}}{dt}.$$

Si π est numerus aequationum conditionalium, quibus $3n$ coordinatae satisfacere debent, fieri debet m aut $= 3n - \pi$ aut $> 3n - \pi$. Si $m = 3n - \pi + \nu$, designante ν numerum positivum, habetur inter quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ numerus ν aequationum conditionalium, unde totidem emergunt inter variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ aequationes conditionales. Ac primum quidem, existente $m = 3n - \pi$, quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se invicem independentes sunt ideoque variationes $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ prorsus arbitrariae. Hoc igitur casu ex aequatione praecedenti symbolica hoc fluit aequationum differentialium systema:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_1'}}{dt}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_2'}}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial R}{\partial q_m} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_m'}}{dt}.$$

Hac forma aequationes differentiales dynamicae iam in editione prima *Mechanicae Lagrangianae* propositae inveniuntur.

Forma Hamiltoniana aequationum dynamicarum deriuatur; quae cum systemate supra considerato congruit. Theorema VI. de tertio integrali e binis quibuslibet inueniendo applicatur in systema dynamicum.

37.

At ill. *Poisson* in laudatissima commentatione de *Variatione Constantium* (Journal de l'Ecole Polyt. Cah. XV) loco quantitatum $q_1', q_2', \ldots q_m'$ alias in formulas dynamicas introduxit,

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'}.$$

Quibus ipsis variabilibus adhibitis in locum functionis R ill. *Hamilton* novam introduxit functionem:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial R}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} q_m' - R \\ &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - R. \end{aligned}$$

Qua functione per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ expressa, ubi simul has omnes quantitates variamus, obtinemus:

$$\begin{aligned} \delta H = {} & q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \cdots + q_m' \delta p_m \\ & - \frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial R}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial R}{\partial q_m} \delta q_m. \end{aligned}$$

Evanescit enim expressio

$$\begin{aligned} & p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \cdots + p_m \delta q_m' \\ & - \left\{ \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m' \right\}. \end{aligned}$$

Expressio ipsius δH inventa iam suppeditat differentialia partialia functionis H secundum novas variabiles sumta sequentia:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2', \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = q_m', \\ &\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial R}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial R}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial q_m} = -\frac{\partial R}{\partial q_m}, \end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis, vice versa R e functione H obtinetur per formulam:

$$\begin{aligned} R &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - H \\ &= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H. \end{aligned}$$

Introductis igitur quantitatibus q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m ut variabilibus, aequatio inventa symbolica iam haec evadit:

$$\delta\left\{p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H\right\} = \frac{d\{p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m\}}{dt}.$$

Facta variatione et differentiatione et substitutis valoribus

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

venit in aequationis praecedentis utraque parte expressio

$$p_1\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\delta\cdot\frac{\partial H}{\partial p_m},$$

qua reiecta, hanc nanciscimur formulam:

$$(1.)\qquad \begin{cases} -\left\{\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right\} = \\ \quad \frac{dp_1}{dt}\delta q_1+\frac{dp_2}{dt}\delta q_2+\cdots+\frac{dp_m}{dt}\delta q_m. \end{cases}$$

Si $m=3n-\pi$, designante π numerum aequationum conditionalium, quibus coordinatae punctorum materialium satisfacere debent, quantitates q_1, q_2, $\ldots$ q_m a se invicem prorsus independentes sunt, earumque variationes δq_1, δq_2, $\ldots$ δq_m omnes arbitrariae. Quo casu ex (1.) fluunt aequationes differentiales *dynamicae* in variabilibus q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m exhibitae:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{dq_1}{dt}, & \frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{dq_2}{dt}, & \ldots & \frac{\partial H}{\partial p_m}=\frac{dq_m}{dt}, \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1}=\frac{dp_1}{dt}, & -\frac{\partial H}{\partial q_2}=\frac{dp_2}{dt}, & \ldots & -\frac{\partial H}{\partial q_m}=\frac{dp_m}{dt}. \end{cases}$$

Qua forma primus ill. *Hamilton* aequationes *dynamicas* exhibuit, neque parum inde commodi in Mechanicam Analyticam redundasse existimo. Observaverat iam l. c. ill. *Poisson*, valores ipsarum $\frac{dq_i}{dt}=q_i'$ per quantitates q_i, p_i expressos ita comparatos esse, ut habeatur

$$\frac{\partial q_i'}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k'}{\partial p_i},$$

(Journal de l'Ecole Polyt. Cah. XV, pag. 275), quae ad finem sibi propositum sufficiebant formulae. E formulis (2.) statim etiam sequentes fluunt:

$$\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}=-\frac{\partial p_k'}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i'}{\partial q_k}=\frac{\partial p_k'}{\partial q_i},$$

siquidem rursus $p_i'=\frac{dp_i}{dt}$ ponimus.

Forma *Hamiltoniana* aequationum differentialium dynamicarum eadem est atque systematis aequationum differentialium vulgarium, cuius integrationem supra docui §§. 33, 34.

Si in aequatione supra (§. 36 (1.)) probata

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i \right\} = \Sigma_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} \delta q_k,$$

in locum ipsorum δx_i, δy_i, δz_i, δq_k simul ponimus x_i', y_i', z_i', q_k', quod licet, quum aequationes conditionales supponantur ipsam t non involvere, eruimus:

$$\Sigma \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial R}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial R}{\partial z_i'} z_i' \right\} = \Sigma \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k'.$$

Unde substituto valore $R = T + U$, quum sit

$$\frac{\partial R}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i', \qquad \frac{\partial R}{\partial y_i'} = \frac{\partial T}{\partial y_i'} = m_i y_i', \qquad \frac{\partial R}{\partial z_i'} = \frac{\partial T}{\partial z_i'} = m_i z_i',$$

prodit:

$$2T = \Sigma \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k' = H + R = H + T + U.$$

In applicationibus igitur ad *dynamicam* est functio H ipsi $T - U$ aequalis, unde aequatio

$$H = h,$$

in qua h est constans arbitraria, est ipsa aequatio *conservationem virium vivarum* concernens.

Docet theorema VI. supra probatum, si habentur aequationum (2.) duo alia integralia quaecunque

$$\varphi = a, \qquad \psi = b,$$

in quibus a et b sunt constantes arbitrariae ipsas φ et ψ non afficientes, inde generaliter deduci integrale novum:

$$\text{Const.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Exponitur problema de expressione $[\varphi, \psi]$ per maiorem variabilium numerum exhibenda, inter quas aequationes conditionales datae sunt.

38.

Quum propter rei utilitatem tum propter egregiam eius difficultatem tum quia accurate examinare iuvat, quaecunque spectant ad expressionem $[\varphi, \psi]$ tantis

proprietatibus gaudentem, investigabo hic expressionem, quam induit $[\varphi, \psi]$, si in ea loco quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se independentium restituuntur $3n$ coordinatae x_i, y_i, z_i, quae datis conditionibus quibuscunque satisfacere debent, sive generalius introducitur maior numerus variabilium $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, inter quas numerus $\mu - m$ relationum locum habent. In hoc problemate supponitur, ipsas φ et ψ ut functiones ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ et quantitatum

$$\xi_1' = \frac{d\xi_1}{dt}, \qquad \xi_2' = \frac{d\xi_2}{dt}, \qquad \ldots \qquad \xi_\mu' = \frac{d\xi_\mu}{dt}$$

datas esse, atque ipsius $[\varphi, \psi]$ expressio investiganda talis esse debet, ut nullae in ea inveniantur quantitates, ad quarum formationem efficiendam datae esse debent relationes, quibus quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ et $q_1, q_2, \ldots q_m$ aliae per alias determinantur, ita ut in formula investiganda nulla variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m$ vestigia remaneant. Iam problema accuratius exponam.

Problema propositum hoc est:

Sint inter μ quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ datae aequationes conditionales numero $\mu - m$,

$$F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \text{etc.},$$

unde etiam inter ipsas $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ habentur aequationes

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu' = 0,$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu' = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quum inter μ quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ datae sint $\mu - m$ aequationes conditionales, exprimi possunt quantitates illae per m quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ a se invicem independentes. Unde posito

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt},$$

exprimi etiam possunt quantitates $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ ope formularum

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}q_2' + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}q_m'.$$

Sit etiam R functio quaecunque ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, \xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$, atque

$$H = \xi_1'\frac{\partial R}{\partial \xi_1'} + \xi_2'\frac{\partial R}{\partial \xi_2'} + \cdots + \xi_\mu'\frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} - R,$$

positoque

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1'} = v_1, \qquad \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} = v_2, \qquad \ldots \qquad \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} = v_\mu$$

exprimatur H per $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$, qua expressione differentiata respective secundum $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ sequitur ex analysi supra tradita vice versa obtineri quantitates ipsis $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ aequales, sive fieri

$$\xi_1' = \frac{\partial H}{\partial v_1}, \qquad \xi_2' = \frac{\partial H}{\partial v_2}, \qquad \ldots \qquad \xi_\mu' = \frac{\partial H}{\partial v_\mu}.$$

Unde cognita expressione illa ipsius H, habetur expressio ipsius R per $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ ope formulae

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H.$$

Substitutis iam expressionibus ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ atque expressionibus ipsarum $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$ per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$, exhibeatur R per has $2m$ quantitates; quo facto demonstratur prorsus eadem ratione atque formula (1.) §. 36 demonstrata est, haec aequatio:

$$\xi_1' \frac{\partial R}{\partial \xi_1'} + \xi_2' \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} + \cdots + \xi_\mu' \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} =$$
$$q_1' \frac{\partial R}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial R}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial R}{\partial q_m'}.$$

Unde expressa R per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$, functio H per easdem quantitates sic exhibetur:

$$H = q_1' \frac{\partial R}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial R}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial R}{\partial q_m'} - R.$$

Posito

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \qquad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \qquad \ldots \qquad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'},$$

exprimatur H per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; qua expressione differentiata secundum $p_1, p_2, \ldots p_m$, vice versa obtinentur quantitates ipsis $q_1', q_2', \ldots q_m'$ aequales sive habentur aequationes

$$q_1' = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad q_2' = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \ldots \qquad q_m' = \frac{\partial H}{\partial p_m}.$$

Unde erit

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H$$
$$= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H.$$

His positis sint φ, ψ binae functiones *quaecunque* ipsarum $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$, $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_\mu'$; quibus expressis per $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ ac deinde

ope aequationum

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'}$$

iisdem expressis per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, formetur expressio

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Functiones φ, ψ etiam per quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ exhiberi possunt. Quibus cognitis expressionibus, quaeritur:

„*datis expressionibus trium functionum H, φ, ψ per quantitates* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ *atque aequationibus, quae inter ipsas* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ *locum habent,*

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \text{etc.},$$

neque vero cognitis relationibus, quibus quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ *per alias independentes* $q_1, q_2, \ldots q_m$ *determinantur, invenire valorem expressionis*

$$[\varphi, \psi]$$“.

Quod est problema propositum.

39.

Expositioni problematis antecedentis has addam dilucidationes. Quantitatum $\xi_i, \xi_i', R, H, \varphi, \psi$ expressiones per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ sunt prorsus determinatae, simulac relationes datae sunt, quarum ope advocatis aequationibus $F = 0, \Phi = 0, \ldots$ quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ per $q_1, q_2, \ldots q_m$ exhiberi possunt. At expressiones ipsarum $q_i, p_i, \xi_i', R, H, \varphi, \psi$ per $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ ope aequationum $F = 0, \Phi = 0, \ldots$ et quae ex iis differentiatione deducuntur, variis modis immutari possunt. Agamus primum de determinatione quantitatum v_i per ipsas ξ_i, ξ_i' atque de formatione functionis H per ipsas ξ_i, v_i exprimenda. Qua in re proficisci debemus a functione R, quae erat functio quaecunque ipsarum ξ_i, ξ_i'. Posito

$$F' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu',$$

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu',$$

. . . . . .

functioni R addi possunt expressiones F, Φ, ... F', Φ', ... per factores arbitrarios λ, μ, ... λ_1, μ_1, ... multiplicatae, quippe quae expressiones ex hypothesi sunt evanescentes. Et maxime distinguendum erit, an ipsi R soli termini $\lambda F+\mu\Phi+\cdots$, an etiam termini $\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$ addantur. Nam casu priore valores ipsarum

$$v_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}$$

prorsus iidem manent, seu potius alias non patiuntur mutationes, nisi quod iis termini in functiones evanescentes F, Φ, ... multiplicati accedant. Unde etiam vice versa expressiones ipsarum ξ_i' atque functionum R, H per quantitates ξ_i, v_i nonnisi easdem mutationes subeunt, scilicet termini per quantitates F, Φ, ... multiplicati iis accedunt neque vero termini in F', Φ', ... ducti.

At longe secus evenit, si functioni R etiam termini $\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$ addantur. Et functio quidem

$$H = \xi_1'\frac{\partial R}{\partial \xi_1'}+\xi_2'\frac{\partial R}{\partial \xi_2'}+\cdots+\xi_\mu'\frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'}-R$$

valorem certe numericum non mutabit, quum sit identice:

$$\xi_1'\frac{\partial F'}{\partial \xi_1'}+\xi_2'\frac{\partial F'}{\partial \xi_2'}+\cdots+\xi_\mu'\frac{\partial F'}{\partial \xi_\mu'}-F' = 0,$$

$$\xi_1'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_1'}+\xi_2'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_2'}+\cdots+\xi_\mu'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_\mu'}-\Phi' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sed quantitates v_i non tantum formam additione expressionum evanescentium mutabunt, sed alios adeo valores numericos induunt. Quippe quae evadunt

$$v_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_i}+\mu_1\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}+\cdots,$$

omissis terminis evanescentibus:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i'}F+\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i'}\Phi+\cdots+\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_i'}F'+\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_i'}\Phi'+\cdots.$$

Qua de re etiam forma functionis H per ipsas ξ_i, v_i expressa alias subire debet mutationes praeter accessum functionum evanescentium, quum valor ipsius H immutatus manere debeat, dum quantitates v_1, v_2, ... v_μ, quae functionem H ingrediuntur, alios valores induant. Ut mutationes accuratius indicem, sit

$$l_i = \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_i}+\mu_1\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}+\cdots,$$

$$L_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i'}F+\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i'}\Phi+\cdots+\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_i'}F'+\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_i'}\Phi'+\cdots,$$

sint porro v_i^0 quantitates, in quas ipsae v_i abeunt, si loco R ponitur

$$R+\lambda F+\mu\Phi+\cdots+\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$$

Tum erit

$$v_i = v_i^0-l_i-L_i;$$

porro posito

$$\lambda^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}-\lambda, \qquad \mu^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\mu}{\partial\xi_i}-\mu, \quad \ldots$$

$$\lambda_1^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_i'} \quad , \qquad \mu_1^0=\Sigma\xi_i'\frac{\partial\mu_1}{\partial\xi_i'} \quad , \quad \ldots$$

abit H in expressionem

$$H^0 = H+\lambda^0 F+\mu^0\Phi+\cdots+\lambda_1^0 F'+\mu_1^0\Phi'+\cdots,$$

omissis quantitatibus se mutuo destruentibus

$$\lambda_1\left\{\Sigma_i\xi_i'\frac{\partial F'}{\partial\xi_i'}-F'\right\}, \quad \mu_1\left\{\Sigma_i\xi_i'\frac{\partial\Phi'}{\partial\xi_i'}-\Phi'\right\}, \quad \ldots$$

atque in termino primo H loco ipsarum v_i positis valoribus $v_i^0-l_i-L_i$. Quibus adhibitis expressionibus sine multo negotio invenitur, quod fieri debet,

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0}=\frac{\partial H}{\partial v_i}=\xi_i'.$$

Rejectis enim terminis evanescentibus fit

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0} = \frac{\partial H}{\partial v_i}-\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\left(\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}+\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}\right)+\lambda_1^0\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}+\mu_1^0\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}+\cdots;$$

porro, quum omnes solarum ξ_i functiones secundum v_i^0 differentiatae evanescant,

$$\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}=\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial F}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\mu}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}+\cdots=0,$$

$$\Sigma_k\frac{\partial H}{\partial v_k}\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}=\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial L_k}{\partial v_i^0}=\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_k'}+\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}\Sigma_k\xi_k'\frac{\partial\mu_1}{\partial\xi_k'}+\cdots$$

$$=\lambda_1^0\frac{\partial F'}{\partial v_i^0}+\mu_1^0\frac{\partial\Phi'}{\partial v_i^0}+\cdots.$$

Unde rejectis terminis se mutuo destruentibus, prodit formula demonstranda:

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0}=\frac{\partial H}{\partial v_i},$$

quae valet pro quolibet indicis i valore. Apposui antecedentia, quamquam ad propositi problematis solutionem non necessaria, sicuti innui, ad dilucidationem rei; prona enim est in hac quaestione ad errores via.

Etiam functiones φ et ψ variis modis mutari possunt addendo iis terminos in F, Φ, ... F', Φ', ... multiplicatos, sive expressis φ, ψ, sicuti requiritur, per quantitates ξ_i, v_i, addendo terminos multiplicatos in F, Φ, ... A, B, ... siquidem per A, B, ... designamus valores ipsarum F', Φ', ... per quantitates ξ_i, v_i exhibitos, scilicet expressiones,

$$A = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$
$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quae expressiones quum evanescere debeant, sunt $A = 0$, $B = 0$, ... aequationes conditionales, quae inter ipsas ξ_i, v_i locum habent.

Ante omnia bene tenendum est, e variis quidem formis, quas functio R per aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ... $F' = 0$, $\Phi' = 0$, ... induere potest, quamcunque eligi posse; sed hac electa atque ratione praescripta inde deductis expressionibus ipsarum v_i per quantitates ξ_i, ξ_i' atque functionis H per quantitates ξ_i, v_i, supponi, has expressiones per aequationes illas non denuo mutari. Alioqui enim in infinitos errores delaberemur.

Expressionum quaesitarum formatio ad duarum summarum determinationem revocatur.

40.

Adstruam primum aequationes, quibus quantitates v_i determinantur per ipsas q_i et p_i, siquidem data est expressio functionis H per ipsas ξ_i et v_i atque expressiones quantitatum ξ_i per ipsas q_i. Habemus

$$\delta\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}\delta q_m,$$

ideoque

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\delta\xi_i = \delta q_1 \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_1} + \delta q_2 \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_2} + \cdots + \delta q_m \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}.$$

Quum habeatur

$$\frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k},$$

quia in expressione ipsius ξ_i' per quantitates q_k, q_k' ipsa q_k' tantum lineariter obvenit atque in $\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}$ ducta, fit:

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} = \Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial R}{\partial q_k'},$$

ideoque:

$$\Sigma_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'} \delta\xi_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_1'} \delta\xi_1 + \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} \delta\xi_\mu$$
$$= \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m.$$

Quum vero positum sit,

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i'} = v_i, \qquad \frac{\partial R}{\partial q_i'} = p_i,$$

aequatio praecedens sic repraesentari potest:

$$(1.) \qquad v_1 \delta\xi_1 + v_2 \delta\xi_2 + \cdots + v_\mu \delta\xi_\mu = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m.$$

In aequatione (1.) variationes δq_1, δq_2, ... δq_m prorsus arbitrariae sunt, dum inter variationes $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, ... $\delta\xi_\mu$ locum habent $\mu - m$ conditiones:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \delta\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \delta\xi_\mu = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \delta\xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \delta\xi_\mu = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Qua de re quantitates p_i quidem per ξ_i, v_i, sed non quantitates v_i per ipsas p_i ex aequatione (1.) determinantur. Habentur enim e (1.) tantum m aequationes:

$$p_1 = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1},$$
$$p_2 = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_m = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}.$$

Ad determinationem completam ipsarum v_i praeter m aequationes praecedentes adhiberi debent $\mu - m$ aequationes sequentes:

$$(2.) \quad \begin{cases} 0 = A = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} \dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} \dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ 0 = B = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Conditis aequationibus (1.) et (2.), quibus quantitates v_i determinantur, iam accedamus ad formationem propositam expressionis quantitatis $[\varphi, \psi]$ per ipsas ξ_k, v_k.

Fit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_i},$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}.$$

His duabus expressionibus multiplicatis habetur valor ipsius $\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i}$, e quo permutando φ et ψ valor ipsius $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$ prodit; quibus subductis, habetur valor expressionis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

e quo, tribuendo ipsi i valores $1, 2, \ldots m$ et summando, prodit expressio ipsius $[\varphi, \psi]$ sequens:

$$(3.)\quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = \Sigma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right\} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}, \\ \quad + \Sigma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} \right\} \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}. \end{cases}$$

In qua expressione sub signo summatorio tribuendi sunt indicibus k et k' valores $1, 2, \ldots \mu$, atque indici i valores $1, 2, \ldots m$. Summam posteriorem sic quoque exhibere licet:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right\}.$$

Iam pro quibuslibet datis valoribus ipsarum k et k' investigemus valorem summarum simplicium:

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} = \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m},$$
$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right\} = \frac{\partial v_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1} + \frac{\partial v_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial v_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m}.$$

In quibus summis non ipsae $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ sed tantum differentialia eorum partialia secundum quantitates p_i, q_i sumta inveniuntur. Iam quaeram, quomodo binae summae per solas $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ exhibeantur.

Summarum propositarum prior determinatur.

41.

Sunt quantitates ξ_k prorsus determinatae functiones ipsarum q_k; nam etsi ξ_k maiore sint numero ipsis q_k quae per illas expressae supponuntur, possunt tamen advocatis aequationibus $F = 0$, $\Phi = 0$ etc. inter ipsas ξ_k datis, vice versa ipsae ξ_k per q_k modo prorsus determinato exprimi. Quae expressiones ipsas p_k nullo modo involvunt. Contra sunt ipsae v_k functiones ipsarum q_k et p_k per (1.) et (2.) determinatae. Quibus observatis, differentietur (1.) secundum p_i; prodit:

$$(4.) \qquad \delta q_i = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\delta\xi_1 + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\delta\xi_\mu.$$

Ex hac aequatione et ex aequationibus (2.) et ipsis secundum p_i differentiatis nanciscimur aequationes sequentes, quarum numerus est μ et e quibus ipsarum $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}, \frac{\partial v_2}{\partial p_i}, \ldots \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}$ valores determinari possunt:

$$(5.) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_\mu}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eiusmodi aequationum linearium eruimus m systemata ponendo loco i numeros 1, 2, ... m; quae systemata multiplicemus respective per

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}$$

et post multiplicationem factam instituamus additionem. Tum adhibita notatione

sequente, in qua k et k' inter se diversi accipiuntur:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1}+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m} = k_{k'}, \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1}+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m} = 1+k_k, \end{cases}$$

invenimus:

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1}k_\mu, \\ 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2}k_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m}k_1+\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m}k_2+\cdots+\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}k_\mu, \\ -\frac{\partial A}{\partial v_k} = \frac{\partial A}{\partial v_1}k_1+\frac{\partial A}{\partial v_2}k_2+\cdots+\frac{\partial A}{\partial v_\mu}k_\mu, \\ -\frac{\partial B}{\partial v_k} = \frac{\partial B}{\partial v_1}k_1+\frac{\partial B}{\partial v_2}k_2+\cdots+\frac{\partial B}{\partial v_\mu}k_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Harum aequationum resolutio revocari potest ad aliarum, quarum numerus tantum est $\mu-m$ sive idem atque aequationum conditionalium $F=0$, $\Phi=0$, etc. Habetur enim:

$$(8.)\quad \begin{cases} k_1 = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_1}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}+\cdots, \\ k_2 = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_2}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_\mu = \lambda_1^{(k)}\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}+\lambda_2^{(k)}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}+\cdots, \end{cases}$$

multiplicatoribus $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$, ..., quorum numerus est $\mu-m$, determinatis per aequationes:

$$(9.)\quad \begin{cases} -\frac{\partial A}{\partial v_k} = a_1\lambda_1^{(k)}+a_2\lambda_2^{(k)}+\cdots, \\ -\frac{\partial B}{\partial v_k} = b_1\lambda_1^{(k)}+b_2\lambda_2^{(k)}+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

siquidem:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}, \\ a_2 = b_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} \\ \qquad = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ b_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aequalitas coefficientium a_2 et b_1 facile patet ex expressionibus ipsarum A et B § 40 (2.) propositis. Invenitur enim utriusque expressionis idem valor:

$$a_2 = b_1 = \Sigma_{k,k'} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}},$$

ipsis k et k' valoribus 1, 2, ... μ tributis. Generaliter aequationes lineares (9.), ad quarum resolutionem investigatio ipsarum k_1, k_2, ... k_μ reducta est, ita comparatae sunt, ut series verticales et horizontales coefficientium eaedem sint. Quae porro coefficientes tantum ab ipsis functionibus F, Φ, etc. neque ab indice k vel k' pendent; index tamen k afficit aequationum (9.) partes constantes. Posito igitur:

$$(11.)\quad \begin{cases} -\lambda_1^{(i)} = A_{1,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + A_{1,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \\ -\lambda_2^{(i)} = A_{2,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + A_{2,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

eruis m systemata eiusmodi formularum tribuendo ipsi k valores 1, 2, ... m, ipsis coefficientibus A immutatis manentibus. Ceterum e noto theoremate algebraico fit

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha},$$

sive etiam in aequationibus (11.) coefficientium series horizontales eaedem sunt atque verticales.

Aptur de altera summa determinanda.

12.

E duabus summis simplicibus

$$\Sigma_\xi \frac{\partial S_\alpha}{\partial q_\xi}\frac{\partial v_{\alpha'}}{\partial p_\xi}, \qquad \Sigma_\xi \left\{ \frac{\partial v_\alpha}{\partial q_\xi}\frac{\partial v_{\alpha'}}{\partial p_\xi} - \frac{\partial v_{\alpha'}}{\partial q_\xi}\frac{\partial v_\alpha}{\partial p_\xi} \right\},$$

quarum valores § 40. vidimus investigandos esse, alteram antecedentibus deter-

minavi seu certe ad alias revocavi quantitates $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$, ... quae per resolutionem $\mu - m$ aequationum linearium inveniuntur. Iam alteram investigemus summam simplicem

$$\Sigma_i \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right\},$$

cuius complicatior fit expressio.

Statuamus, e sequentibus μ aequationibus linearibus:

$$(12.) \quad \begin{cases} M_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} u_\mu, \\ M_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2} u_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_m = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} u_\mu, \\ N_1 = \frac{\partial A}{\partial v_1} u_1 + \frac{\partial A}{\partial v_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} u_\mu, \\ N_2 = \frac{\partial B}{\partial v_1} u_1 + \frac{\partial B}{\partial v_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} u_\mu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

obtineri resolutione facta incognitarum u_1, u_2, ... u_μ valores sequentes:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_{1,1} M_1 + C_{1,2} M_2 + \cdots + C_{1,m} M_m + D_{1,1} N_1 + D_{1,2} N_2 + \cdots, \\ u_2 &= C_{2,1} M_1 + C_{2,2} M_2 + \cdots + C_{2,m} M_m + D_{2,1} N_1 + D_{2,2} N_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\mu &= C_{\mu,1} M_1 + C_{\mu,2} M_2 + \cdots + C_{\mu,m} M_m + D_{\mu,1} N_1 + D_{\mu,2} N_2 + \cdots \end{aligned}$$

Si in aequationibus (12.) ponitur $M_i = 1$, reliquae autem omnes M_1, M_2, ... M_m, N_1, N_2, ... praeter M_i evanescunt, aequationes illae eaedem fiunt atque aequationes (5.), e quibus valores ipsarum $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}$, $\frac{\partial v_2}{\partial p_i}$, ... $\frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}$ petendi sunt, sive fit

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} = C_{1,i}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial p_i} = C_{2,i}, \quad \ldots \quad \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} = C_{\mu,i},$$

vel generaliter

$$\frac{\partial v_k}{\partial p_i} = C_{k,i}.$$

Unde facta aequationum (12.) *resolutione obtinentur incognitarum* u_1, u_2, ... u_μ

valores sequentes:

$$(13.)\quad \begin{cases} u_1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_1}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial p_m} M_m + D_{1,1} N_1 + D_{1,2} N_2 + \cdots, \\ u_2 = \frac{\partial v_2}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_2}{\partial p_m} M_m + D_{2,1} N_1 + D_{2,2} N_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\

Si ponimus

$$M_{i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}\frac{\partial v_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}\frac{\partial v_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_{i'}}$$

atque

$$N_1^{(i)} = -\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

$$N_2^{(i)} = -\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

. . . . . .

systema m **aequationum (14.) iunctum systemati aequationum (15.) convenit cum aequationibus (12.), siquidem** μ **quantitates** $\frac{\partial v_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial v_2}{\partial q_i}$, ... $\frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}$ **pro incognitis** u_1, u_2, ... u_μ **habentur. Hinc secundum formulas (13.) nanciscimur:**

$$\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = u_k = \frac{\partial v_k}{\partial p_1}M_1 + \frac{\partial v_k}{\partial p_2}M_2 + \cdots + \frac{\partial v_k}{\partial p_m}M_m + D_{k,1}N_1^{(i)} + D_{k,2}N_2^{(i)} + \cdots.$$

Statuamus

$$(16.)\qquad \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1} + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m} = (k')_k,$$

ita ut $(k)_{k'} - (k')_k$ **sit altera summa §. 40 investigatu proposita. Qua adhibita notatione, poterit aequatio praecedens hoc modo repraesentari:**

$$(17.)\qquad \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}(1)_k + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}(2)_k + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}(\mu)_k + D_{k,1}N_1^{(i)} + D_{k,2}N_2^{(i)} + \cdots.$$

Substitutis ipsorum $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, **etc. valoribus positoque**

$$(18.)\qquad \begin{cases} w_1^{(k)} = (1)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_1} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_1} - \cdots, \\ w_2^{(k)} = (2)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_2} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ w_\mu^{(k)} = (\mu)_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} - \cdots, \end{cases}$$

aequatio praecedens in hanc abit:

$$(19.)\qquad \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}w_1^{(k)} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}w_\mu^{(k)}.$$

E qua nanciscimur m **formulas tribuendo ipsi** i **valores 1, 2, ... m. E quibus**

ut obtineatur rursus systema aequationum linearium formae aequationum (12.) investigemus adhuc valorem expressionum

$$N_1 = \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)},$$
$$N_2 = \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quod hoc modo fieri potest.

43.

Habetur

$$\frac{\partial A}{\partial v_1}(1)_k + \frac{\partial A}{\partial v_2}(2)_k + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu}(\mu)_k = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = \Sigma_{k'} \Sigma_i \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i}.$$

Differentiando autem aequationem $A = 0$ secundum q_i fit:

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} = -\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i},$$

unde

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} k'_k.$$

Erat autem

$$k'_k = \lambda_1^{(k')} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + \lambda_2^{(k')} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots.$$

Ponendo igitur:

$$(20.) \quad \begin{cases} A_1 = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_1^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \lambda_1^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \lambda_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \lambda_1^{(\mu)}, \\ A_2 = \Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_2^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \lambda_2^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

fit

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots.$$

Eodem modo ponendo

$$(21.) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1} \lambda_1^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} \lambda_1^{(\mu)}, \\ B_2 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1} \lambda_2^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} \lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

fit

$$\Sigma_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} (k')_k = -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} - B_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - B_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots$$

et similes aequationes pro qualibet aequatione conditionali obtinentur.

Statuamus

$$(22.) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial A}{\partial v_\mu} = \alpha_1, \\ \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial B}{\partial v_\mu} = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

porro

$$(23.) \quad \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial A}{\partial v_\mu} = \beta_1, \\ \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial B}{\partial v_\mu} = \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Tum multiplicando aequationes (9.) §. 41 per $\frac{\partial A}{\partial \xi_k}$, $\frac{\partial B}{\partial \xi_k}$, ... et summationem instituendo respectu indicis k, nanciscimur aequationum linearium systemata, quibus valores ipsarum A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... determinantur:

$$(24.) \quad \begin{cases} -\alpha_1 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots, \\ -\alpha_2 = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\beta_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots, \\ -\beta_2 = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quodlibet systema tot continet aequationes lineares totque incognitas quot datae sunt inter quantitates ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ aequationes conditionales $F=0$, $\Phi=0$, ... Resolutione facta nanciscimur ipsorum A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... valores:

$$(25.) \quad \begin{cases} -A_1 = \Lambda_{1,1}\alpha_1 + \Lambda_{1,2}\alpha_2 + \cdots, \\ -A_2 = \Lambda_{2,1}\alpha_1 + \Lambda_{2,2}\alpha_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -B_1 = \Lambda_{1,1}\beta_1 + \Lambda_{1,2}\beta_2 + \cdots, \\ -B_2 = \Lambda_{2,1}\beta_1 + \Lambda_{2,2}\beta_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

quibus in formulis coefficientes $A_{i,i'}$ iidem sunt atque in (11.) §. 41. Antequam ulterius progrediar, valores ipsorum D et ipsi ad quantitates A revocandi sunt. Eum in finem in aequationibus (12.) pono

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad u_2 = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad u_\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu},$$

unde fit

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad \ldots \quad M_i = 0,$$
$$N_1 = a_1, \quad N_2 = b_1, \quad \ldots,$$

quibus substitutis ex aequationibus (13.) obtinetur:

$$(26.) \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = a_1 D_{k,1} + b_1 D_{k,2} + \cdots$$

Eodemque modo fit:

$$(27.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = a_2 D_{k,1} + b_2 D_{k,2} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aequationibus (26.), (27.) resolutis prodeunt valores quaesiti:

$$(28.) \qquad \begin{cases} D_{k,1} = A_{1,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{1,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ D_{k,2} = A_{2,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{2,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

His valoribus simulque ipsorum A_1, A_2, ... valoribus (25.) substitutis in aequatione:

$$\Sigma_{\kappa'} \frac{\partial A}{\partial v_{\kappa'}} (k')_\kappa = -\frac{\partial A}{\partial \xi_\kappa} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_\kappa} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\kappa} - \cdots,$$

simulque revocando, quod supra §. 41 adnotavi, esse

$$A_{a,b} = A_{b,a},$$

eruimus:

$$(29.) \qquad \Sigma_{\kappa'} \frac{\partial A}{\partial v_{\kappa'}} (k')_\kappa = -\frac{\partial A}{\partial \xi_\kappa} + D_{\kappa,1} \alpha_1 + D_{\kappa,2} \alpha_2 + \cdots,$$

eodemque modo fit:

$$(30.) \qquad \Sigma_{\kappa'} \frac{\partial B}{\partial v_{\kappa'}} (k')_\kappa = -\frac{\partial B}{\partial \xi_\kappa} + D_{\kappa,1} \beta_1 + D_{\kappa,2} \beta_2 + \cdots$$

Hinc, substituto e (18.) valore:

$$w_{\kappa'}^{(\kappa)} = (k')_\kappa - D_{\kappa,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_{\kappa'}} - D_{\kappa,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_{\kappa'}} - \cdots,$$

prodit:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} &= \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\
&= -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\alpha_1 + D_{k,2}\alpha_2 + \cdots \\
&\qquad - D_{k,1}\alpha_1 - D_{k,2}\beta_1 - \cdots \\
\Sigma_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} &= \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\
&= -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\beta_1 + D_{k,2}\beta_2 + \cdots \\
&\qquad - D_{k,1}\alpha_2 - D_{k,2}\beta_2 - \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Statuamus, quaecunque sint A et B variabilium $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ *functiones,*

$$(31.) \quad \begin{cases} [A, B]' = \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} \\ \qquad - \dfrac{\partial A}{\partial v_1}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial A}{\partial v_2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots - \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}, \end{cases}$$

qua in notatione plagulam superposui, ut expressionem distinguam a similiter respectu variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ formata.

Eruentur hac nova notatione ad formulas praecedentes applicata expressiones quaesitae:

$$(32.) \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2}[A, B]' + \cdots, \\ N_2 = \dfrac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}[B, A]' + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quae aequationes iunctae m aequationibus, quae tribuendo ipsi i valores 1, 2, ... m obtinentur e (19.), suppeditant systema aequationum linearium ipsis (12.) simile.

Quarum resolutio suppeditat e (13.):

$$w_{k'}^{(k)} = (k)_{k'} + D_{k',1}N_1 + D_{k',2}N_2 + \cdots$$

Unde substitutis praecedentibus ipsorum $N_1, N_2, \ldots$ valoribus (32.) atque e

(18.) valore

$$w_{k'}^{(k)} = (k')_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - \cdots,$$

prodit altera summa §. 40 investigatu proposita

$$(33.)\quad \begin{cases} (k')_k - (k)_{k'} = D_{k,1}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',1}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k} + \cdots \\ \qquad + (D_{k',1}D_{k,2} - D_{k,1}D_{k',2})[A, B]' + \cdots \end{cases}$$

Quae est expressio quaesita, e qua si ipsorum D valores (28.) substituis variabiles $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ prorsus, quod postulabatur, abierunt. Observo in formula (33.) terminos

$$(D_{k',1}D_{k,2} - D_{k,1}D_{k',2})[A, B]'$$

inveniri tot, quot binarum aequationum conditionalium habentur combinationes, sive numerum $\frac{(\mu-m)(\mu-m-1)}{2}$. Unde si *unica* tantum aequatio conditionalis datur, eiusmodi non habentur termini. Eo casu habetur, si $F=0$ est aequatio conditionalis:

$$a.k_{k'} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial A}{\partial v_k},$$

$$a.\{(k')_k - (k)_{k'}\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial A}{\partial \xi_k},$$

ubi

$$A = \Sigma\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial H}{\partial v_k}, \qquad a = \Sigma\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\cdot\frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}},$$

siquidem in altera summa ipsi k, in altera ipsis k et k' valores $1, 2, \ldots \mu$ tribuuntur.

Formulae antecedentes applicantur ad casum, quo ipsae $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ coordinatas orthogonales punctorum materialium significant.

44.

Sit $\mu = 3n$ simulque quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n}$ designent $3n$ coordinatas punctorum motorum orthogonales, sitque puncti, cuius una coordinata per ξ_k denotatur, massa m_k, ita ut quantitatum $m_1, m_2, \ldots m_\mu$ ternae ad idem punctum pertinentes inter se aequales existant. Tum erit, designante U solarum ξ_k functionem ab ipsis ξ_k' vacuam atque T semissem virium vivarum,

$$H = T - U = \tfrac{1}{2}\Sigma m_k \xi_k' \xi_k' - U,$$

$$v_k = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} = m_k \xi_k',$$

atque

$$A = \Sigma \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \cdot \xi'_k, \qquad B = \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \cdot \xi'_k, \qquad \ldots$$

$$a_1 = \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad a_2 = b_1 = \Sigma \frac{1}{m_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}, \quad b_2 = \Sigma \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad \ldots$$

$$m_k \lambda_{k'}^{(k)} = A_{k',1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + A_{k',2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots,$$

$$m_k k_{k'} = m_{k'} k'_k = A_{1,1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} + A_{1,2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right\}$$

$$+ A_{2,2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \cdots$$

. . . . . .

Adnoto data occasione, fieri pro assignata ipsarum ξ_k significatione

$$m_k . k_{k'} = m_{k'} . k'_k$$

sive

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_{k'}}{\partial p_i} = \Sigma_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_k}{\partial p_i}$$

quod facile hoc modo intelligitur. Est

$$\xi'_{k'} = \Sigma_{i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} \cdot q'_{i'}, \qquad \xi'_k = \Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} \cdot q'_{i'},$$

unde

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_{k'}}{\partial p_i} = \Sigma_{i,i'} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i},$$

$$\Sigma_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_k}{\partial p_i} = \Sigma_{i,i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} \cdot \frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i}.$$

Est autem

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad q'_{i'} = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}},$$

unde

$$\frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i} = \frac{\partial q'_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}},$$

sive expressio $\frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i}$ indicibus i et i' commutatis immutata manet. Unde altera summarum appositarum duplicium, scribendo i' loco i atque i loco i', in alteram abit, sive binae inter se aequales existunt, q. d. e.

De usu functionum A in determinandis multiplicatoribus Lagrangianis.

45.

Quantitatibus $A_{a,b}$, quibus antecedentibus usi sumus, etiam *multiplicatores Lagrangiani* determinantur, qui formandis aequationibus differentialibus dynamicis inserviunt, quoties inter variabiles, quae punctorum materialium positionem determinant, aequationes conditionales habentur. Ad quas formandas aequationes differentiales, adhibeo formulam symbolicam §. 37 (1.) propositam, in qua, ut $q_1, q_2, \ldots q_m$ semper variabiles independentes designent, loco $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ scribo $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$. Quo facto aequatio illa haec fit:

$$(1.) \quad 0 = \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + \frac{dv_1}{dt}\right\}\delta\xi_1 + \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_2} + \frac{dv_2}{dt}\right\}\delta\xi_2 + \cdots + \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} + \frac{dv_\mu}{dt}\right\}\delta\xi_\mu.$$

Inter variationes $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, etc. habentur aequationes:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

siquidem rursus $F = 0$, $\Phi = 0$, etc. sunt aequationes conditionales inter quantitates $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ propositae. Per regulam notam aequationes praecedentes in multiplicatores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ductas aequationis (1.) alteri parti addo et terminos in singulas variationes ductos evanescere statuo. Quo facto aequationes differentiales inter variabiles $t, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots v_\mu$ obtinentur sequentes, insuper aequationibus $\xi_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}$ advocatis:

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_1}, & \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \cdots, \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_2}, & \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - \cdots, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\xi_\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_\mu}, & \frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} - \lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} - \lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} - \cdots \end{cases}$$

Quibus aequationibus adiungendae sunt ipsae aequationes conditionales

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \ldots$$

et quae ex earum differentiatione sequuntur:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \ldots\ldots$$

His postremis iterum differentiatis et substitutis e (2.) ipsorum $\frac{d\xi_i}{dt}$, $\frac{dv_i}{dt}$ valoribus obtinemus:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1}+\frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu}\\
-&\frac{\partial A}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-\frac{\partial A}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial A}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}=a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\cdots,\\
&\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1}+\frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}\\
-&\frac{\partial B}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-\frac{\partial B}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial B}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}=b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

siquidem hic $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ eaedem sunt quantitates atque §. 41., (10.). Unde, si advocamus notationem §. 43., (31.) propositam, eruimus valores multiplicatorum sequentes:

$$(3.)\quad \begin{cases}\lambda_1 = A_{1,1}[A,H]'+A_{1,2}[B,H]'+\cdots,\\ \lambda_2 = A_{2,1}[A,H]'+A_{2,2}[B,H]'+\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Unde e §. 43., (28.) aequationes differentiales dynamicae fiunt:

$$(4.)\quad \begin{cases}\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-D_{1,1}[A,H]'-D_{1,2}[B,H]'-\cdots,\\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_2}-D_{2,1}[A,H]'-D_{2,2}[B,H]'-\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}-D_{\mu,1}[A,H]'-D_{\mu,2}[B,H]'-\cdots\end{cases}$$

e quibus iam multiplicatores sunt eliminati.

Ope summarum supra inventarum ipsa expressio $[\varphi,\psi]$ formatur.

46.

Formulam (3.), §. 40:

$$[\varphi,\psi]=\Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}\frac{\partial\xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}+\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}-\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right\}$$

e notationibus supra adhibitis §. 41., (6.) atque §. 42., (16.) sic exhibere possumus:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned}[\varphi,\psi] = {}& \Sigma_k\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}+\Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{kk'}\\ &+\Sigma_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\{(k)_{k'}-(k')_k\}.\end{aligned}\right.$$

Qua aequatione, si ipsorum $k_{kk'}$ atque $(k)_{k'}-(k')_k$ valores supra inventi substituuntur, prodit ipsius $[\varphi,\psi]$ expressio investigatu proposita, in qua variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m$ vestigia nulla inveniuntur.

Summarum, e quibus expressio antecedens componitur, secundae et tertiae transformationes sequentes adiungo.

Habetur e §. 41., (8.):

$$\begin{aligned}&\Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{kk'} =\\ &\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\left\{k_1\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+k_\mu\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\}\\ &-\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\left\{k_1\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+k_2\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+k_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\}\\ &=\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_1^{(k)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\\ &-\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial\xi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_1^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\\ &+\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_2^{(k)}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\\ &-\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\right\}\Sigma_k\lambda_2^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

sive etiam:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma_{k,k'}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\}k_{kk'} =\\ &\Sigma_k\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\{\lambda_1^{(k)}[F,\psi]'+\lambda_2^{(k)}[\Phi,\psi]'+\cdots\}\\ &-\Sigma_k\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\{\lambda_1^{(k)}[F,\varphi]'+\lambda_2^{(k)}[\Phi,\varphi]'+\cdots\}.\end{aligned}\right.$$

Habetur porro e §. 43., (33.):

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma_{k,k'} \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_{k'}}\{(k')_k-(k)_{k'}\} = \\ \Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} D_{k,1}.\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\dfrac{\partial A}{\partial\xi_k} - \Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} D_{k,1}.\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\dfrac{\partial A}{\partial\xi_k} \\ +\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} D_{k,2}.\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\dfrac{\partial B}{\partial\xi_k} - \Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} D_{k,2}.\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\dfrac{\partial B}{\partial\xi_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -[A,B]'\left\{\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} D_{k,1}.\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} D_{k,2} - \Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} D_{k,2}.\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\cdot D_{k,1}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Fit autem e §. 43., (28.):

$$\Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} = A_{k',1}\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + A_{k',2}\Sigma_k \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + \cdots,$$

$$\Sigma_k D_{k,k'}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} = A_{k',1}\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} + A_{k',2}\Sigma_k \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} + \cdots$$

sive

$$(4.)\quad \begin{cases} \Sigma_k D_{k,k'}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} = A_{k',1}[F,\varphi]' + A_{k',2}[\Phi,\varphi]' + \cdots, \\ \Sigma_k D_{k,k'}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} = A_{k',1}[F,\psi]' + A_{k',2}[\Phi,\psi]' + \cdots \end{cases}$$

His formulis si utimur et advocatis (11.) §. 41. aequationem (2.) sic repraesentare licet:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma_{k,k'}\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_{k'}} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_{k'}}\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\right\} k_{k'} = \\ -\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} - \Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} - \cdots \\ +\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + \Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \end{cases}$$

Formulis (3.) et (5.) substitutis in (1.) prodit:

$$(6.)\quad \begin{cases} [\varphi,\psi]-[\varphi,\psi]' = \\ -[\varphi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} - [\varphi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} - \cdots \\ +[\psi,A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} + [\psi,B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k} + \cdots \\ +[A,B]'\left\{\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k} - \Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quae formula generalis satis difficilis erat investigatu.

Expressio inventa per varias eius proprietates verificatur.

47.

Quantitas per quam in §. antecedente ipsam $[\varphi, \psi]$ expressi et quam denotabo per

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} \Xi = {} & [\varphi,\psi]' - [\varphi, A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - [\varphi, B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \cdots \\ & + [\psi, A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + [\psi, B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k} + \cdots \\ & + [A, B]'\left\{\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\cdot\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

variis gaudere debet proprietatibus memorabilibus, quae simul varias expressionis inventae verificationes suppeditant. Ac primum non mutetur eius valor necesse est, si in locum functionum φ, ψ ponatur

$$\varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots,$$

designantibus λ, μ, λ', μ', λ_1, μ_1, λ_1', μ_1', ... quascunque ipsarum ξ_i, v_i functiones. Valor enim quantitatis $[\varphi, \psi]$, cui expressio Ξ aequalis inventa est, ea mutatione nullo modo afficitur. Quae expressionis Ξ proprietas ex ipsa eius formatione facile patebit, si haec alia propositio antea demonstrata erit, *expressionem* Ξ, *posita in locum alterutrius functionum* φ, ψ *una e functionibus* $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$, *quaecunque sit altera functio, evanescere.* Quae propositio tantum probanda erit pro casibus, quibus $\varphi = F$ atque $\varphi = A$ ponitur, functione ψ arbitraria manente. Reliqui enim casus, quibus φ functionibus $\Phi, \ldots, B, \ldots$ aequiparatur, sive quibus φ arbitraria manet atque ψ alicui e functionibus $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$ aequalis ponitur, prorsus eodem modo tractari possunt.

Posito $\varphi = F$, evanescunt termini

$$\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

quum functio F solas ξ_k involvat neque quantitates v_k. Hinc posito $\varphi = F$ eruimus:

$$\Xi = [F,\psi]' - [F, A]'\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - [F, B]'\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\psi}{\partial v_k} - \cdots$$
$$= [F,\psi]' - \Sigma_k\{[F, A]' D_{k,1} + [F, B]' D_{k,2} + \cdots\}\frac{\partial\psi}{\partial v_k}.$$

At e formulis (26.), (27.) §. 43, in quibus est

$$a_1 = [F,\ A]', \quad b_1 = [F,\ B]', \quad \ldots$$
$$a_2 = [\Phi,\ A]', \quad b_2 = [\Phi,\ B]', \quad \ldots$$

habetur:

$$(2.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F,\ A]' D_{k,1} + [F,\ B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi,\ A]' D_{k,1} + [\Phi,\ B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Quarum formularum ope abit expressio ipsius Ξ antecedens in hanc:

$$\Xi = [F, \psi]' - \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0.$$

Evanescit igitur Ξ posito $\varphi = F$, q. d. e. Eodem modo demonstratur evanescere Ξ ponendo $\varphi = \Phi$, vel ponendo $\psi = F$, sive $\psi = \Phi$.

Ponamus iam in expressione (1.) $\varphi = A$; quaerendi sunt ante omnia valores quantitatum

$$E_1 = \Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad E_2 = \Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

Ad quos inveniendos multiplicentur (2.) per $\frac{\partial A}{\partial v_k}$ atque positis loco k valoribus 1, 2, ... μ instituatur pro singulis aequationibus (2.) summatio; provenit:

$$\Sigma_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F,\ A]' = [F,\ A]' E_1 + [F,\ B]' E_2 + \cdots,$$
$$\Sigma_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi,\ A]' = [\Phi,\ A]' E_1 + [\Phi,\ B]' E_2 + \cdots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Unde obtinetur

$$(3.) \quad E_1 = \Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k} = 1, \quad E_2 = \Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_2} = 0, \quad \ldots$$

ac si aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ... plures duabus datae sunt, evanescunt reliquae omnes similes expressiones $\Sigma_k D_{k,3} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, $\Sigma_k D_{k,4} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, ... Eodem modo probatur fieri

$$\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial v_k} = 1,$$

atque evanescere reliquas omnes quantitates $\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, $\Sigma_k D_{k,3} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, ... Per

aequationes (3.) videmus, ipsam Ξ posito $\varphi = A$ evanescere, quum sit $[A, A]' = 0$, $[A, \psi]' + [\psi, A]' = 0$, ac facile pateat, quemadmodum ea substitutione facta termini in $[A, B]'$ ducti evanescunt, ita si aequationes conditionales plures duabus datae sint, evanescere terminos ductos in expressiones similes, quarum numerus idem est atque numerus combinationum binarum aequationum conditionalium. Eodem modo demonstratur, evanescere Ξ ponendo $\varphi = B$ vel ponendo $\psi = A$ sive $\psi = B$.

Designemus iam expressionem (1.) per

$$\Xi = [\varphi, \psi]'',$$

ac ponamus

$$\varphi^0 = \varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi^0 = \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots$$

Patet e formatione expressionis $[\varphi, \psi]''$, rejiciendo post differentiationes partiales transactas expressiones per quantitates evanescentes F, Φ, ..., A, B, ... multiplicatas, fieri:

$$\begin{aligned}[\varphi^0, \psi^0]'' &= [\varphi^0, \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'' \\ &= [\varphi^0, \psi]'' + \lambda_1 [\varphi^0, F]'' + \mu_1 [\varphi^0, \Phi]'' + \cdots \\ &\quad + \lambda_1' [\varphi^0, A]'' + \mu_1' [\varphi^0, B]'' + \cdots\end{aligned}$$

At demonstravi modo, quaecunque sit φ^0 functio, haberi

$$[\varphi^0, F]'' = 0, \quad [\varphi^0, \Phi]'' = 0, \quad \ldots,$$
$$[\varphi^0, A]'' = 0, \quad [\varphi^0, B]'' = 0, \quad \ldots;$$

unde fit

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]''.$$

Eodem modo probatur, reiectis post differentiationes partiales transactas expressionibus per quantitates evanescentes F, Φ, ..., A, B, ... multiplicatis, fieri

$$\begin{aligned}[\varphi^0, \psi]'' &= [\varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \psi]'' \\ &= [\varphi, \psi]'' + \lambda [F, \psi]'' + \mu [\Phi, \psi]'' + \cdots \\ &\quad + \lambda' [A, \psi]'' + \mu' [B, \psi]'' + \cdots\end{aligned}$$

Unde quum probatum sit, quaecunque sit ψ functio, haberi

$$0 = [F, \psi]'' = [\Phi, \psi]'' = \cdots = [A, \psi]'' = [B, \psi]'' = \cdots,$$

fit

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]'' = [\varphi, \psi]'',$$

quod est theorema demonstrandum.

Deinde etiam non mutari debet expressionis Ξ valor, si loco functionis R ponitur $R+\lambda F+\mu\Phi+\cdots+\lambda_1 F'+\mu_1\Phi'+\cdots$, atque de hac nova functione deducuntur valores ipsarum v_i a praecedentibus diversi et forma valde discrepans functionis H, sicuti §. 39 praecepi. Sed verificatio huius proprietatis, ex ipsa quantitatis Ξ formatione petita, quum molestissima esse videatur, sufficiat rem examinare, si ipsi R tantum termini $\lambda F+\mu\Phi+\cdots$ addantur, quo casu ibidem vidimus, ipsarum v_i valores non mutari, atque functioni H similes tantum terminos accedere.

Demonstremus igitur, quantitatem Ξ non mutare valorem, si in eo loco ipsius H ponatur $H+\lambda F+\mu\Phi+\cdots$, designantibus $\lambda, \mu, \ldots$ quascunque ipsarum ξ_i, v_i expressiones. Qua mutatione functionis H facile patet, etiam ipsas $A, B, \ldots$ similes tantum mutationes subire, ideoque etiam ipsarum $A, B, \ldots$ differentialia partialia secundum quantitates v_i sumta, nec non expressiones $[F, A]', [F, B]', \ldots [\Phi, A]', [\Phi, B]', \ldots$; unde, sicuti e formulis (2.) elucet, etiam quantitates $D_{k,1}$, $D_{k,2}$, etc. alias non mutationes subeunt. Qua de re omnium harum quantitatum valores immutati manebunt. Sed mutabunt valorem expressiones $[\varphi, A]', [A, B]', \ldots$ ac similes. Quae tamen mutationes eae esse debent, ut ipsius Ξ valor immutatus maneat. Quod facile patebit, ubi probatum erit, expressionis Ξ terminorum, qui functione A affecti sunt, aggregatum evanescere, si loco A in iis ponatur F. Tum enim similes quoque propositiones locum habebunt, evanescere idem aggregatum, si loco A ponatur Φ, vel evanescere aggregatum terminorum, qui functione B affecti sunt, ponendo F sive Φ loco B, etc. Quibus iunctis observationi, expressiones huiusmodi $[A, B]'$ evanescere, ubi simul loco A atque B ponantur quaecunque sive eaedem sive diversae e functionibus $F, \Phi, \ldots$, sponte elucet, valorem ipsius Ξ non mutari. Propositio autem, evanescere terminorum ipsius Ξ functione A affectorum aggregatum, si loco A substituatur F, sequitur absque magno negotio ex aequationibus (2.).

De functionibus quibuslibet φ, ψ, per aequationes datas conditionales $F=0$, $\Phi=0$, ... ita transformandis, ut fiat $[\varphi, \psi]=[\varphi, \psi]'$.

48.

Formas, quas functio φ induere potest propter aequationes, quae locum habent, conditionales, semper ita determinare licet, ut *per has ipsas aequationes conditionales* evanescant valores expressionum

$$[F, \varphi]' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$
$$[\Phi, \varphi]' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ac similiter functioni ψ eam formam conciliare licet, ut per aequationes conditionales evanescant valores expressionum $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, ... Sit ipsius φ expressio adhibenda $\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots$; multiplicatores λ', μ', ... semper ita determinare licet, ut evanescant valores quantitatum

$$[F, \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots]', \quad [\Phi, \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots]',$$

seu reiectis terminis in A, B, ... ductis ut evanescentibus, ut fiat

$$[F, \varphi]' + \lambda'[F, A]' + \mu'[F, B]' + \cdots = 0,$$
$$[\Phi, \varphi]' + \lambda'[\Phi, A]' + \mu'[\Phi, B]' + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per formulas similes determinantur multiplicatores λ_1', μ_1', ... ita, ut quantitates

$$[F, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]', \quad [\Phi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'$$

evanescant. Quibus expressionibus $\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots$, $\psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots$, quod licet, loco φ, ψ positis, habemus ipsarum φ, ψ formas tales, pro quibus fiat

$$(1.) \quad \begin{cases} [F, \varphi]' = 0, & [\Phi, \varphi]' = 0, & \ldots, \\ [F, \psi]' = 0, & [\Phi, \psi]' = 0, & \ldots, \end{cases}$$

quod propositum erat.

Inventis ipsarum φ, ψ formis, pro quibus aequationes antecedentes (1.) locum habent, statim sequitur e (28.), §. 43., fieri etiam:

$$(2.) \quad \begin{cases} \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = 0, & \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = 0, & \ldots, \\ \Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0, & \Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0 & \ldots \end{cases}$$

Unde in expressione ipsius Ξ termini omnes praeter $[\varphi, \psi]'$ evanescunt, sive *fit, quoties* $[F, \varphi]' = 0$, $[\Phi, \varphi]' = 0$, ..., $[F, \psi]' = 0$, $[\Phi, \psi]' = 0$, ... *haec aequatio:*

$$(3.) \quad [\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Quum per aequationes conditionales functiones φ, ψ semper ita transformare liceat, ut conditionibus illis satisfiat, sequitur *datis ipsarum* ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ, v_1, v_2, ... v_μ *functionibus binis quibuscunque* φ *et* ψ, *semper per aequationes*

conditionales, quae inter quantitates illas locum habent, formam talem iis conciliari posse, ut fiat:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\\
-&\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\\
=&\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\\
-&\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mu}.
\end{aligned}$$

Ex aequationibus (2.) §. antec. facile deduco sequentes:

$$(4.)\quad \begin{cases} [F,\ \varphi]' = [F,\ A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[F,\ B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots, \\ [\Phi,\ \varphi]' = [\Phi,\ A]'\Sigma_k D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[\Phi,\ B]'\Sigma_k D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Quibus comparatis cum iis, quibus antecedentibus multiplicatorum λ', μ', ... valores determinabantur, fit:

$$\lambda' = -\Sigma_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\quad \mu' = -\Sigma_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\quad \ldots\ .$$

Unde *quaecunque sit* φ *functio*, habemus e (1.):

$$(5.)\quad \begin{cases} \left[F,\ \varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \left[\Phi,\ \varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Qua de re etiam habetur:

$$\left[F,\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$

$$\left[\Phi,\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Erit igitur e (3.):

$$(6.)\quad [\varphi,\psi] = \Xi =$$

$$\left[\varphi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\ \psi-\Sigma_k(D_{k,1}A+D_{k,2}B+\cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]'.$$

Quae expressio nova ipsius Ξ facile convenit cum illa §. 47., (1.), ad quam supra pervenimus, ubi reputas, reiectis terminis in A, B, ... ductis ut evanescentibus, fieri pro multiplicatoribus λ', μ', ... λ_1', μ_1', ... quibuscunque

$$[\varphi+\lambda' A+\mu' B\ldots, \psi+\lambda_1' A+\mu_1' B\ldots]' = [\varphi,\psi]'+\lambda_1'[\varphi, A]'+\mu_1'[\varphi, B]'-\cdots$$
$$+\lambda'[\psi, A]'+\mu'[\psi, B]'-\cdots$$
$$+(\lambda'\mu_1'-\lambda_1'\mu')[A, B]'+\cdots$$

Considerationibus antecedentibus superstrui potest nova methodus, qua expressio ipsius Ξ, supra via satis prolixa inventa, indagetur; quae methodus huic toti quaestioni magnam lucem affundet.

E considerationibus antecedentibus alia via petitur expressionem propositam ipsius $[\varphi, \psi]$ derivandi.

49.

Quantitates q_1, q_2, ... q_m non sunt functiones prorsus determinatae ipsarum ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ, quippe quibus addi possunt functiones F, Φ, ... in factores arbitrarios ductae. Sic etiam p_1, p_2, ... p_m non sunt functiones prorsus determinatae ipsarum ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ, v_1, v_2, ... v_μ, quippe valoribus ipsarum p_i §. 40 traditis addi possunt functiones F, Φ, ..., A, B, ... in factores arbitrarios ductae. Hinc, si datur expressio functionis alicuius φ per quantitates ξ_i, v_i, simulque habetur expressio eiusdem functionis φ per quantitates q_i, p_i, quaeri potest, quaenam e variis illis formis valorum quantitatum q_i, p_i eligendae sint, ut ex hac ipsius φ expressione post factas substitutiones illa data proveniat. Iam dico, *si in expressione functionis cuiuslibet φ per quantitates q_i, p_i ipsarum quidem q_i valores formas assumant, quascunque per aequationes $F=0$, $\Phi=0$, ... assumere possunt; ipsarum vero p_i valoribus ea ipsa forma tribuatur, qua in formis §. 40 propositis gaudent, neque ullo modo forma illa mutatur auxilio aequationum $F=0$, $\Phi=0$, ..., $A=0$, $B=0$, ... fore ut ea forma functionis φ proveniat, pro qua habetur:*

$$[F, \varphi]' = 0, \qquad [\Phi, \varphi]' = 0, \qquad \ldots.$$

Fit enim

$$[F, \varphi]' = \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \Sigma_{k,i}\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial v_k}.$$

At quum supponatur, *identice* positum esse e §. 40:

$$p_i = v_1\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}+v_2\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}+\cdots+v_\mu\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

illa suppositione fit

$$\frac{\partial p_i}{\partial v_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}.$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Quibus substitutis obtinemus:

$$[F, \varphi]' = \Sigma_{k,i} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \Sigma_i \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \Big).$$

Iam vero habetur

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0,$$

quum functio F, substitutis ipsarum ξ_i valoribus per quantitates q_i expressis, identice evanescere debeat. Unde, substitutis in ipsis $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ ipsarum q_i valoribus assumtis per quantitates ξ_i expressis, abire debet expressio

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$$

in aggregatum terminorum in F, Φ, ... ductorum. Unde etiam e formula antecedente sequitur expressionem $[F, \varphi]'$ in tale aggregatum abire, hoc est, *si in functione aliqua* φ *per ipsas* $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_1, \ldots p_m$ *expressa substituuntur loco ipsarum* p_i *valores:*

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

ac deinde loco ipsarum q_i *quaecunque ponuntur functiones ipsarum* ξ_i, *denique adjumento* $\mu - m$ *aequationum* $F = 0$, $\Phi = 0$, ... *exprimuntur etiam quantitates* $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ *per ipsas* ξ_i, *abit functio* φ *in talem expressionem ipsarum* ξ_i, v_i, *ut quantitas*

$$[F, \varphi]' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$

evadat aggregatum terminorum in F, Φ, ... *ductorum ideoque eius valor evanescat.* Eodem modo demonstratur, expressiones $[\Phi, \varphi]'$, $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, etc. in eiusmodi aggregata abire ideoque evanescere. Electis functionibus ipsarum ξ_i, quae in locum ipsarum q_i ponantur, habentur quotientes differentiales partiales $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ per ipsas ξ_i expressae ope aequationum linearium:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
1 &= \frac{\partial q_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
0 &= \frac{\partial q_m}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Si quantitates $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ per aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ... in tales expressiones rediguntur, ut *identice* sit pro quolibet ipsius i valore

$$\Sigma_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \qquad \Sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \qquad \ldots$$

functionibus φ talis forma conciliata erit, pro quibus expressiones

$$[F, \varphi]', \qquad [\Phi, \psi]', \qquad \ldots$$

adeo *identice* evanescant. Generaliter autem data quaecunque functio φ per aequationes $A = 0$, $B = 0$, ... in formam redigitur, pro qua expressiones $[F, \varphi]'$, $[\Phi, \varphi]'$, ... identice evanescunt, si eliguntur m expressiones a se invicem independentes:

$$w_i = \alpha_i' v_1 + \alpha_i'' v_2 + \cdots + \alpha_i^{(\mu)} v_\mu$$

respectu ipsarum v_k lineares, in qua coefficientes $\alpha_i^{(k)}$ ut tales ipsarum ξ_k functiones determinantur, pro quibus identice fiat

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\alpha_i' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\alpha_i^{(\mu)}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\alpha_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\alpha_i^{(\mu)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Ex. gr., si $\mu - m = 2$ sive si duae tantum adsunt aequationes conditionales sive functiones F, Φ, assumere licet

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + v_3, \\ w_2 &= \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 + v_4, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w_{\mu-2} &= \alpha_{\mu-2} v_1 + \beta_{\mu-2} v_2 + v_\mu, \end{aligned}$$

determinatis α_k, β_k per duas aequationes

$$\alpha_k \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k+2}} = 0,$$

$$\alpha_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k+2}} = 0.$$

Quae facile ad quemlibet numerum aequationum conditionalium sive functionum F, Φ, ... extenduntur. Determinatis functionibus linearibus w_i ita ut dictis conditionibus satisfaciant, eliminari possunt per $\mu - m$ aequationes $A = 0$, $B = 0$, ... quantitates v_1, v_2, ... v_μ e functione φ, ita ut solarum ξ_i, w_i functio evadat, quae erit expressio quaesita.

Ut eruatur expressio ipsius Ξ §. 47 proposita, tantum opus est, ut demonstretur, *quoties*

$$(1.) \quad [F, \varphi]' = 0, \quad [\Phi, \varphi]' = 0, \quad \ldots$$

$$(2.) \quad [F, \psi]' = 0, \quad [\Phi, \psi]' = 0, \quad \ldots$$

fieri

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Vocemus enim φ^0, ψ^0 eas expressiones ipsarum φ, ψ, pro quibus aequationes (1.), (2.) locum habent, sitque

$$[\varphi, \psi] = [\varphi^0, \psi^0]',$$

sequitur e §. 48., fore

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \\ \psi^0 &= \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots, \end{aligned}$$

ubi

$$\lambda' = -\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \mu' = -\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

$$\lambda_1' = -\Sigma_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k}, \quad \mu_1' = -\Sigma_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots$$

neque alias formas induere posse functiones φ^0, ψ^0, nisi quod iis adhuc addi possint termini in F, Φ, ... ducti. Facile autem patet, quum aequationes (1.), (2.) posito $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$ locum habeant, expressionem $[\varphi^0, \psi^0]'$ eius-

modi terminis ipsis φ^0, ψ^0 additis valorem non mutare. Unde eruetur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]' = \Xi$$

q. e. d. Eodem modo probatur, si solae (1.) locum habeant, fore

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'.$$

Propositio autem illa, quoties aequationes (1.), (2.) locum habeant, fore

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]',$$

sic demonstrari potest.

Eadem continuantur. Demonstratur, integrale tertium, quod e binis aequationum dynamicarum integralibus conflare licet, nullo modo pendere a variabilium electione.

50.

Antecedentibus probavi, *pro omnibus formis functionum* φ, ψ, *pro quibus aequationes* (1.) §. praec. *locum habeant, quantitatem* $[\varphi, \psi]'$ *eundem valorem servare.* Unde supponere licet, φ, ψ eas esse functiones, quae ex earum expressionibus per quantitates q_k, p_k prodeunt ponendo loco p_k expressionem

$$p_k = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_k} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_k} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_k},$$

quippe quibus proprietatem illam suppetere §. antec. vidimus. Pro illis autem functionibus φ, ψ habetur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} + \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial v_i} = \Sigma_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k},$$

similesque formulae pro functione ψ locum habent. Unde fit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} =$$

$$\Sigma_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} +$$

$$\Sigma_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}}.$$

In qua expressione indici i valores $1, 2, \ldots \mu$ tribuendi sunt atque nova summatio instituenda; fit autem

$$\Sigma_i \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial q_k}{\partial q_{k'}} = 0, \qquad \Sigma_i \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} = 0,$$

excepto casu, quo in priore formula fit $k = k'$, quo casu illa in unitatem abit: unde evanescunt nova illa summatione termini omnes praeter

$$\Sigma_k\Big(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big)\Sigma_i \frac{\partial q_k}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_k}\Big) = \Sigma_k\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big).$$

Unde prodit

$$\Sigma_i\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\psi}{\partial v_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_i}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\Big) = \Sigma_k\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\Big),$$

sive

$$[\varphi, \psi]' = [\varphi, \psi],$$

q. d. e.

Prorsus eadem demonstratione facile probatur, *si aequationes conditionales inter ipsas* ξ_i *omnino non habeantur ideoque* $\mu = m$, *semper fieri*

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

sive

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} \\
&- \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m} \\
&= \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu} \\
&- \frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\mu}.
\end{aligned}$$

Unde patet, *quantitatem* $[\varphi, \psi]$ *nullo modo pendere a variabilium* q_i *electione, sed tantum a natura intima functionum* φ *et* ψ. Unde etiam, si

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

sunt bina integralia systematis aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

earundem aequationum differentialium integrale *tertium, quod datur per aequationem:*

$$[\varphi, \psi] = \text{Const.},$$

nullo modo pendet a variabilium electione.

Theorema de tertio integrali e binis inveniendo extenditur ad casum quo aequationes conditionales inter variabiles intercedunt. — De relationibus quae locum habent inter integralia principium conservationis virium vivarum et principium conservationis centri gravitatis concernentia.

51.

Statuamus, aequationem

$$\varphi = \text{Const.}$$

esse integrale aequationum differentialium vulgarium (2.) §. 45 propositarum.

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \cdots,$$

atque insuper *ita comparatam esse functionem* φ, *ut identice habeatur*

$$[\varphi, H]' = 0, \quad [\varphi, F]' = 0, \quad [\varphi, \Phi]' = 0, \quad \ldots$$

dico fore, ut habeatur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]',$$

quaecunque sit ψ *functio.* Nam e theoremate V. §. 26 identice fit, quaecunque sint F, H, φ functiones:

$$[F, [\varphi, H]']' + [\varphi, [H, F]']' + [H, [F, \varphi]']' = 0,$$

unde casu proposito identice erit:

$$[\varphi, [H, F]']' = 0 \quad \text{sive} \quad [\varphi, A]' = 0.$$

eodemque modo obtinetur identice:

$$[\varphi, B]' = 0.$$

Probavi autem §. 48., quoties

$$[\varphi, F]' = 0, \quad [\varphi, \Phi]' = 0, \quad \ldots$$

fieri

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \lambda_2' B + \cdots]',$$

unde sequitur

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]' + \lambda_1'[\varphi, A]' + \lambda_2'[\varphi, B]' + \cdots$$

Hinc casu proposito, quo vidimus evanescere $[\varphi, A]'$, $[\varphi, B]'$, ... fit

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

q. d. e.

Ope propositionis antecedentis deduci potest e theoremate VI. hoc theorema:

Theorema VII.

„Sint F, Φ, ... quaecunque quantitatum ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ functiones, atque sit identice:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}=0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

porro identice habeatur:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial H}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$
$$-\frac{\partial H}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}-\frac{\partial H}{\partial v_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial H}{\partial v_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}=0,$$

unde $\varphi = Const.$ fit integrale systematis aequationum differentialium vulgarium

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial v_i},\quad \frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \xi_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial \xi_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}-\cdots,$$

in quibus supponamus quantitates ξ_1, ξ_2, ... ξ_μ subiectas esse aequationibus $F=0$, $\Phi=0$, ...; sit denique $\psi = Const.$ aliud earundem aequationum integrale quodcunque, erit etiam aequatio sequens:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial v_\mu}$$
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}-\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu}=\text{Const.}$$

aequationum differentialium vulgarium propositarum integrale.“

Theorematis praecedentis applicationem faciam ad integralia, quae principia *conservationis arearum* et *conservationis centri gravitatis* concernent.

Designantibus x_i, y_i, z_i coordinatas orthogonales puncti, cuius massa m_i, habentur tria integralia, quae *principium conservationis arearum* concernunt:

$$\text{Const.}=\varphi_1=\Sigma m_i(y_i z_i'-z_i y_i'),$$
$$\text{Const.}=\varphi_2=\Sigma m_i(z_i x_i'-x_i z_i'),$$
$$\text{Const.}=\varphi_3=\Sigma m_i(x_i y_i'-y_i x_i').$$

Quae notum est semper locum habere, si vires puncta systematis sollicitantes sint attractiones vel repulsiones sive mutuae sive versus initium coordinatarum directae, atque insuper systema per conditiones, quibus subiectum est, nullo

modo impediatur, quin libere circa initium coordinatarum rotetur. Quoties ξ_k unam e quantitatibus x_i, y_i, z_i designat, loco v_k (cf. §. 44) respective ponendum erit $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$. Unde designante ψ aliam quamcunque ipsarum x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' functionem, fit

$$[\varphi_1, \psi]' = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i'} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i'} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ z_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\},$$

ac formulae similes respectu functionum φ_2, φ_3 obtinentur. Casu, quem consideramus, valent conditiones, quae in theoremate VII. postulantur, siquidem pro functione φ unam e functionibus φ_1, φ_2, φ_3 accipimus. Quoties igitur $\psi =$ Const. et ipsum integrale quodcunque problematis est, e theoremate illo eruitur:

$$(1.) \quad \begin{cases} \text{Const.} = [\varphi_1, \psi]' = \Sigma \left\{ z_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right\}, \\ \text{Const.} = [\varphi_2, \psi]' = \Sigma \left\{ x_i' \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} + x_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\}, \\ \text{Const.} = [\varphi_3, \psi]' = \Sigma \left\{ y_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} - x_i' \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} + y_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\}. \end{cases}$$

Si in his formulis statuimus, quod licet, functionem ψ esse unam ex ipsis functionibus φ_1, φ_2, φ_3, facile invenitur:

$$(2.) \quad \begin{cases} [\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \\ [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \\ [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3. \end{cases}$$

Quoties in problemate mechanico principium conservationis arearum locum habet, satisfit aequationibus identicis, quas in theoremate VII. statuimus, siquidem in theoremate illo loco φ ponitur una e functionibus φ_1, φ_2, φ_3. Nam aequationes illae identicae in theoremate VII. propositae hunc ipsum constituunt characterem *conservationis*, e quo principium mechanicum suam traxit appellationem. Hinc formulis praecedentibus theorema VII. applicare possumus, sive designante $\varphi =$ Const. integrale, quod ad principium conservationis arearum pertinet, atque $\psi =$ Const. aliud quodcunque integrale problematis mechanici, in quo principium illud valet, erit

$$(3.) \quad [\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Unde e tribus formulis praecedentibus (2.) fluunt etiam tres sequentes:

$$(4.) \quad [\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

In formula (3.) functio φ sive unam e functionibus φ_1, φ_2, φ_3 sive etiam earum functionem quamlibet designare potest.

Videmus e formulis (4.), si regula generalis, secundum quam vidimus e duobus integralibus formari posse tertium, applicetur ad tria integralia, quae principium conservationis arearum suppeditat, haec integralia tantum sese ipsa generare neque in illo casu ea regula ad integralia nova perveniri. Animadverti autem potest, quum secundum regulam illam trium illorum integralium bina quaelibet tertium procreent, eam demonstrare fieri non posse, ut in ullo problemate mechanico duo tantum locum habeant, tertium integrale locum non habeat. Quod hic per propositiones mere analyticas absque ullo considerationum geometricarum auxilio evincitur.

Statuamus

$$\chi_1 = \Sigma m_i x_i', \qquad \chi_2 = \Sigma m_i y_i', \qquad \chi_3 = \Sigma m_i z_i';$$

constituunt tria integralia

$$\chi_1 = \text{Const.}, \qquad \chi_2 = \text{Const.}, \qquad \chi_3 = \text{Const.}$$

principium *conservationis centri gravitatis*. Invenitur autem, si loco ψ ponitur in (1.) successive χ_1, χ_2, χ_3:

$$(5.)\quad \begin{cases} [\varphi_1, \chi_1]' = 0, & [\varphi_1, \chi_2]' = \chi_3, & [\varphi_1, \chi_3]' = -\chi_2, \\ [\varphi_2, \chi_1]' = -\chi_3, & [\varphi_2, \chi_2]' = 0, & [\varphi_2, \chi_3]' = \chi_1, \\ [\varphi_3, \chi_1]' = \chi_2, & [\varphi_3, \chi_2]' = -\chi_1, & [\varphi_3, \chi_3]' = 0. \end{cases}$$

Sequitur ex his formulis, quod etiam considerationibus geometricis probari potest, quoties principium conservationis arearum valeat, trium integralium, quae principium conservationis centri gravitatis concernunt, unum quodcunque necessario duo reliqua secum ducere. Si unicum valet integrale $\varphi_1 = \text{Const.}$ e tribus, quae principium conservationis arearum concernunt, hoc et integrale $\chi_1 = \text{Const.}$ aliud non generatur; sed integrale $\varphi_1 = \text{Const.}$ et alterum integralium $\chi_2 = \text{Const.}$, $\chi_3 = \text{Const.}$ alterum procreat. Secundum theorema VII. formulae (5.) etiam valent, si plagulae superscriptae rejiciuntur.

Formulae perturbationum simplicissimae, quae e systemate integralium proposito obtinentur.

52.

Redeamus ad systema aequationum differentialium vulgarium:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \cdots & \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, & \cdots & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Quarum integralia

$$(2.)\quad \begin{cases} f = H = a, & H_1 = a_1, & H_2 = a_2, & \ldots & H_{m-1} = a_{m-1}, \\ H' = b + t, & H_1' = b_1, & H_2' = b_2, & \ldots & H_{m-1}' = b_{m-1} \end{cases}$$

sub forma tali invenire docui §. 34, ut identice sit

$$(3.)\quad [H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, H_k'] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0,$$

excepto casu, quo in expressione $[H_i, H_k']$ fit $i = k$; quippe habetur

$$(4.)\quad [H_i, H_i'] = -1, \quad \text{sive} \quad [H_i', H_i] = +1.$$

Quibus aequationibus fit, ut pro forma sub qua integralia invenimus, etiam formulae, quae problema perturbatum concernunt, formam simplicissimam induant.

Consideremus enim in integrabilibus inventis quantitates $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, $b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ ut functiones ipsius t tales, ut integralia iam satisfaciant aequationibus differentialibus:

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_m}, \end{cases}$$

designante Ω functionem ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ quamcunque. Quae est extensio formularum vulgarium perturbationum, primum ab ill. *Hamilton* in medium prolata, dum vulgo functionem perturbatricem Ω quantitates $p_1, p_2, \ldots p_m$ non implicare supponitur. Quoties enim functio Ω ipsas p_i non continet, fit e (5.), sicuti in (1.):

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

sive *differentialia* prima $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$ eodem modo in problemate perturbato atque non perturbato per $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ exprimuntur. Unde, quum in utroque problemate ipsae $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ eodem modo a t atque elementis $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ pendeant, quae tantum in posteriore problemate ut variabiles spectantur, etiam differentialia prima $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$ in perturbato atque non perturbato problemate per tempus et elementa iisdem formulis exhibentur. Quae est suppositio vulgaris. Sed in ea, quam secundum ill. *Hamilton* proposui, extensione variabiles quidem

q_i, p_i omnes eodem modo per tempus et elementa in utroque problemate exhibentur, sed differentialia prima diversa ratione per q_i et p_i exprimuntur ideoque etiam diversa ratione per tempus et elementa.

Differentiando (2.) et substituendo (5.) obtinetur:

$$\frac{da_i}{dt} = [H_i, f]+[H_i, \Omega],$$

$$\frac{db_i}{dt} = [H_i', f]+[H_i', \Omega],$$

excepta tantum formula, quae pro elemento b invenitur:

$$\frac{db}{dt}+1 = [H', f]+[H', \Omega].$$

Sed habemus e (3.), (4.):

$$[H_i, f] = [H_i, H] = 0, \qquad [H_i', f] = [H_i', H] = 0,$$

praeter

$$[H', f] = [H', H] = +1;$$

unde pro *quolibet* ipsius i valore fit:

$$(6.) \quad \begin{cases} \frac{da_i}{dt} = [H_i, \Omega], \\ \frac{db_i}{dt} = [H_i', \Omega]. \end{cases}$$

Si in his formulis post expressiones ad dextram ope aequationum (2.) formatas loco variabilium $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ introducuntur ut variabiles ipsae $a, a_1, \ldots a_{m-1}, b, b_1, \ldots b_{m-1}$, evadunt illae formulae (6.) inter has et ipsum t aequationes $2m$ differentiales vulgares, quibus elementa a_i, b_i ut functiones ipsius t determinanda sunt. Habetur autem, si functionem Ω in expressionibus ad dextram, per elementa a_i, b_i atque t expressam supponimus, quum sit $a_i = H_i$, $b_i = H_i'$:

$$[H_i, \Omega] = \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}[H_i, H_k]+\Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}[H_i, H_k'],$$

$$[H_i', \Omega] = \Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}[H_i', H_k]+\Sigma_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}[H_i', H_k'].$$

Evanescunt autem e (3.) termini in differentialia partialia $\frac{\partial \Omega}{\partial a_k}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial b_k}$ ducti omnes, praeter

$$[H_i, H_i'] = -1,$$

unde fit,

$$[H_i, \Omega] = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

$$[H_i', \Omega] = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}.$$

Hinc abeunt formulae (6.) in sequentes:

$$(7.) \quad \begin{cases} \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \\ \frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}, \end{cases}$$

sive

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a},$$
$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1},$$
$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{da_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{m-1}}, \quad \frac{db_{m-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}}.$$

Quae formulae pro differentialibus elementorum perturbatorum inventae, sunt egregiae simplicitatis.

E quibus patet insequens theorema:

*) Problema quoddam approximatum huiuscemodi aequationibus contineatur:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \cdots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \cdots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

designante f quamlibet ipsarum p_i, q_i functionem. Cuius systematis secundum methodum supra propositam inventa sint integralia:

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \cdots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

ubi a, a_1, $\ldots$ a_{m-1} constantes arbitrarias denotent, quae in functionibus H, H_1, $\ldots$ H_{m-1} non occurrant, et ubi functiones H, H_1, $\ldots$ H_{m-1} aequationibus

$$0 = [H_i, H_k] = \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} + \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial q_1} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}$$

*) Abhinc usque ad initium §. 53 lacuna in manuscripto invenitur, quam illo argumento quod sine dubio *Jacobi* eo loco tractandum sibi proposuerat explere conatus sum. *C.*

identice satisfaciant. Deinde si ope aequationum

$$H = a, \quad H_1 = \dot{a}_1, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

ipsarum p_i valores per $q_1, q_2, \ldots q_m$ et per constantes arbitrarias $a, a_1, \ldots a_{m-1}$ exhibentur, erit

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m)$$

expressio integrabilis, atque erunt

$$\frac{\partial V}{\partial a} = b + t, \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}$$

aequationes finitae problematis approximati, designantibus $b, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ constantes novas arbitrarias. Jam si problema perturbatum contineatur aequationibus his:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m},$$

in quibus functio perturbatrix Ω functionem quamlibet ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ denotet, exprimantur ex aequationibus integralibus problematis approximati ipsae $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, nec non functio Ω, per $a, a_1, \ldots a_{m-1}, b, b_1, \ldots b_{m-1}, t$. Tum introductis quantitatibus $a, a_1, \ldots a_{m-1}, b, b_1, \ldots b_{m-1}$ loco ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ tamquam variabilibus, aequationes differentiales problematis perturbati abeunt in has:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \ldots \quad \frac{da_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{m-1}},$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \ldots \quad \frac{db^{m-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}},$$

quarum forma aequationibus propositis prorsus est similis.

Formulae perturbationum et theorema de tertio integrali e binis inveniendo extenduntur ad casum, quo functio f ipsam t explicite continet.

53.

Formulae perturbatoriae §. antec. traditae nullo modo mutantur, si functio f ipsam t etiam explicite involvit. Factis enim in §. antec. mutationibus indicatis, invenimus, datis aequationibus differentialibus perturbatis:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m},$$

fieri formulas differentiales elementorum perturbatorum:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_m},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_m}.$$

Addam, etiam theorema VI. §. 27 valere, si functio f ipsam t involvat, sive, *designantibus*

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

bina integralia quaecunque aequationum

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

fieri tertium integrale

$$[\varphi, \psi] = \text{Const.}$$

Ut enim $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ integralia sint aequationum differentialium propositarum, earum ope identice fieri debet $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = 0$, sive

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + [\varphi, f] = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} + [\psi, f] = 0.$$

Unde aequatio identica, quae e theoremate V. §. 26 habetur,

$$[[\varphi, \psi], f] + [[\psi, f], \varphi] + [[f, \varphi], \psi] = 0,$$

substitutis aequationibus *identicis:*

$$[\psi, f] = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad [f, \varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

in hanc abit:

$$[[\varphi, \psi], f] + \left[\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right] =$$

$$[[\varphi, \psi], f] + \frac{\partial[\varphi, \psi]}{\partial t} = 0.$$

Quae ope aequationum differentialium propositarum convenit cum aequatione

$$\frac{d[\varphi, \psi]}{dt} = 0,$$

quae demonstranda erat. Propositionem praecedentem ea, qua eam exhibuimus extensione, iam ill. *Poisson* olim tradidit.

De integrali cuius variatione aequationes dynamicae derivantur, etiam casu quo functio f vel U ipsam t explicite involvat.

54.

Si in problematis mechanicis functio f adhuc ipsam t *explicite* involvit, quem casum antecedentibus consideravimus, principia generalia de conservatione virium vivarum, arearum, centri gravitatis valere desinunt. Tantum in locum principii minimae actionis aliud proponere licet simile, quod etiam hoc casu valet. Quoties enim ipsa t ut variabilis independens non variatur, sed solae functiones eius $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, atque statuuntur aequationes:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

quibus determinentur $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_m}{dt}$: aequationes differentiales reliquas

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

amplectitur una aequatio symbolica:

$$(1.) \quad \begin{cases} \delta\left\{p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right\} = \\ \frac{d.\{p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m\}}{dt}. \end{cases}$$

Quod etiam locum habet, si f ipsam t explicite continet, quippe quae invariata manet. Ex integratione aequationis praecedentis prodit, si pro limitibus ipsius t evanescunt variationes omnes δq_i sive quantitates q_i datos valores induere debent:

$$(2.) \quad \delta\int\left\{p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right\}dt = 0.$$

Formula (1.) eadem est atque supra §. 37 exhibita, si tantum H loco f scribitur; illo tamen loco suppositum erat, H sive f ipsam t explicite non continere. Ibidem vidimus in applicationibus mechanicis, expressionem in (2.) sub signo integrali contentam, esse

$$p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f = T + U,$$

semper designante T semissem summae virium vivarum atque U functionem coordinatarum x_i, y_i, z_i, cuius differentialia partialia secundum x_i, y_i, z_i sumta exprimunt vires motrices, quibus massa m_i secundum directiones axium coordinatarum sollicitatur. Quae functio U casu, quem consideramus, ipsam t etiam

explicite involvit. In problematis igitur mechanicis, etiamsi U ipsam t explicite continet, valebit aequatio:

$$(3.) \qquad \delta \int (T+U)\,dt = 0,$$

quae eo casu quodammodo principii minimae actionis locum tenet. Quam aequationem (3.) primum video ab ill. *Hamilton* in Commentationibus iam saepius laudatis adhibitam esse. Quae adeo facilius sese accommodat ad aequationes differentiales dynamicas inde derivandas quam principium illud. Neque hoc est, uti opinabantur Mathematici, sed illa aequatio, quae respondet principio statico *quietis*. Neque vero de integrali $\int (T+U)\,dt$ valet, quod de principio minimae actionis probari potest, integrale cuius evanescit variatio, *semper* fieri *minimum*, dummodo ne per nimium intervallum extendatur. Nam illud integrale etiam pro angustissimis intervallis, aliis casibus minimum, aliis maximum, aliis neutrum fit.

De combinatione quadam principii conservationis virium vivarum cum principio conservationis arearum, quae certis casibus etiam valet, si functio U ipsam t explicite continet.

55.

Quoties U ipsam t involvit, quum neque principium conservationis virium vivarum neque conservationis arearum valeat, videamus, an non casibus quibusdam earum combinatio locum habere possit. Sint aequationes propositae:

$$(1.) \qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \cdots, \end{cases}$$

designantibus $F=0$, $\Phi=0$, ... aequationes conditionales atque ipsi i tributis valoribus $1, 2, \ldots n$, siquidem n est numerus punctorum materialium systematis. Quae sunt notae formulae dynamicae, in quibus iam suppono, functionem U etiam ipsam t continere. Multiplicatis (1.) per $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ et summatione facta, prodit:

$$(2.) \qquad \frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

terminis in λ_1, λ_2, ... ductis per aequationes conditionales evanescentibus.

Ut respectu plani coordinatarum x, y principium conservationis arearum locum habeat, primum aequationes conditionales ita comparatae esse debent, ut sit identice:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \left\{ y_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial F}{\partial y_i} \right\} = 0, \\ \Sigma_i \left\{ y_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right\} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Deinde etiam functio U, a qua vires sollicitantes pendent, ita comparata esse debet, ut identice sit:

$$\Sigma_i \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} = 0.$$

Sed ut obtineatur integrale aliquod casu quem consideramus, non opus est ut expressio ad laevam aequationis praecedentis evanescat. Nam quum e (1.) sequatur:

$$(4.)\quad \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \int \Sigma \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} dt$$

atque e (2.) expressionis $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ integrale obtineatur, tantum necesse est, ut identice habeatur:

$$(5.)\quad \Sigma \left\{ y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right\} = \alpha \frac{\partial U}{\partial t},$$

designante α constantem. Quippe quo casu e (2.) et (3.) eruetur integrale aequationum differentialium propositarum:

$$(6.)\quad \alpha(T-U) + \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \text{Const.},$$

sive *certa combinatio principiorum conservationis virium vivarum et arearum locum habebit.*

Restat, ut functio U ita determinetur, ut aequationi (4). identice satisfaciat, et indagetur, quaenam sint problemata mechanica, quae functioni U ita determinatae respondeant.

Docent praecepta nota integrationis aequationum differentialium partialium linearium, U designare posse quamcunque functionem integralium systematis aequationum differentialium vulgarium:

$$dt : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dy_1 : dy_2 : \ldots : dy_n =$$
$$\alpha : -y_1 : -y_2 : \ldots : -y_n : x_1 : x_2 : \ldots : x_n,$$

hoc est functionum, quae in integratione harum aequationum constantibus arbitrariis aequales existunt. Aequationibus differentialibus

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dy_1 : dy_2 : \ldots : dy_n =$$
$$-y_1 : -y_2 : \ldots : -y_n : x_1 : x_2 : \ldots : x_n$$

satisfit aequationibus:

$$x_i = \alpha_i \cos(\varphi + \beta_i), \quad y_i = \alpha_i \sin(\varphi + \beta_i),$$

in quibus α_i, β_i sunt constantes arbitrariae atque φ designare potest functionem quamcunque ipsius t. Quae functio φ determinatur per proportionem

$$dt : \alpha = dx_1 : -y_1 = d\varphi : 1,$$

unde

$$\alpha\varphi = t.$$

Si loco coordinatarum orthogonalium x_i, y_i polares introducuntur, ponendo

$$x_i = r_i \cos v_i, \quad y_i = r_i \sin v_i,$$

atque loco constantis $\frac{1}{\alpha}$ ponitur γ, fit:

$$\alpha_i = r_i, \quad \beta_i = v_i - \gamma t.$$

Unde iam est forma maxime generalis functionis U, quae aequationi (5.) identice satisfacit, functio arbitraria ipsarum r_i atque $v_i - \gamma t = v_i - \frac{t}{\alpha}$, hoc est distantiarum punctorum materialium ab initio coordinatarum proiectarum in ipsarum x, y planum, et angulorum, quos distantiae proiectae faciunt cum recta, *quae in plano illo uniformiter circa initium coordinatarum rotatur.* Insuper functio U etiam quantitates z_i quocunque modo continere potest.

Aequationibus (3.) satisfieri constat, si F et Φ sunt functiones ipsarum r_i atque differentiarum ipsarum v_i. Unde habemus propositionem:

„*Statuamus in aequationibus differentialibus dynamicis* (1.), *posito* $x_i = r_i \cos v_i$, $y_i = r_i \sin v_i$, *functiones* F, Φ, ... *praeter quantitates* z_i, r_i *tantum differentias ipsarum* v_i *continere, porro ipsam* U *esse functionem quamlibet quantitatum* z_i, r_i *atque* $v_i - \gamma t$, *designante* γ *constantem, erit aequationum* (1.) *integrale*:

$$T - U + \gamma \Sigma m_i \left\{ y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right\} = \text{Const.}$$"

Integrale inventum etiam sic repraesentare licet:

$$(7.) \qquad T - U - \gamma \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt} = \text{Const.},$$

sive etiam:

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2+r_i^2\left(\frac{dv_i}{dt}-\gamma\right)^2\right\} = \tfrac{1}{2}\gamma^2\Sigma m_i r_i^2+U+\text{Const.}.$$

Pars laeva aequationis praecedentis (8.) est semissis summae virium vivarum systematis, siquidem refertur systema ad axes mobiles coordinatarum x et y, in ipsarum plano circa initium coordinatarum uniformiter rotantes.

Aequationes differentiales (1.) notum est sic etiam repraesentari posse:

$$(9.)\qquad \begin{cases} m_i\left(\dfrac{d^2r_i}{dt^2}-r_i\left(\dfrac{dv_i}{dt}\right)^2\right) = \dfrac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots, \\ m_i\dfrac{d.r_i^2\dfrac{dv_i}{dt}}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial v_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial v_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_i}+\cdots, \\ m_i\dfrac{d^2z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{cases}$$

Si statuitur

$$w_i = v_i-\gamma t,$$

erit U functio ipsarum r_i, w_i, z_i, quae praeter has quantitates ipsam t non continet; porro aequationes (9.) evadunt:

$$(10.)\qquad \begin{cases} m_i\left(\dfrac{d^2r_i}{dt^2}-r_i\left(\dfrac{dw_i}{dt}\right)^2\right) = \gamma m_i r_i\left\{2\dfrac{dw_i}{dt}+\gamma\right\}+\dfrac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots, \\ m_i\dfrac{d.r_i^2\dfrac{dw_i}{dt}}{dt} = -\gamma m_i\dfrac{d.r_i^2}{dt}+\dfrac{\partial U}{\partial w_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial v_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_i}+\cdots, \\ m_i\dfrac{d^2z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{cases}$$

Si tres aequationes praecedentes per dr_i, dw_i, dz_i multiplicantur atque in productis ipsi i valores 1, 2, ... n tribuuntur, omnium summa facile suppeditat integrale inventum (8.). Termini enim bini in r_i, $\frac{dr_i}{dt}$, $\frac{dw_i}{dt}$ ducti se mutuo destruunt, eritque

$$\Sigma_i\frac{\partial F}{\partial w_i}dw_i = \Sigma_i\frac{\partial F}{\partial v_i}dv_i, \qquad \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial w_i}dw_i = \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}dv_i,$$

quum e suppositione supra circa functiones F, Φ, ... facta identice sit

$$\Sigma_i\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \qquad \Sigma_i\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0, \qquad \ldots.$$

Aequationes differentiales ipsis (10.) similes ill. *Laplace* in Opere de *Machina Coelesti* tradidit, quaerens motum planetae verum circa *ipsius* medium, dum formulae praecedentes accommodatae sunt quaesitioni, qua duorum planetarum alterius motus verus circa *alterius* medium consideratur.

Functio U forma antecedentibus praescripta gaudet, *quoties puncta* m_i *quum a se invicem tum a centris quotcunque trahuntur, quae circa axem coordinatarum* z *uniformiter rotantur, communi rotationis velocitate, et in qua neque ipsa neque puncta* m_i *reagunt.* Pro quibus centris etiam substitui possunt corpora solida cuiuslibet formae exterioris ac constitutionis interioris, quae circa axem coordinatarum z eadem ac constanti velocitate rotantur atque insuper neque a se invicem neque a punctis m_i sollicitantur. His omnibus casibus integrale unum propositum locum habebit. Qui obveniunt casus in problemate trium corporum, siquidem statuatur, quod proxime licet, corpus principale et corpus perturbans in plano fixo uniformiter rotari circa commune eorum gravitatis centrum. Unde integrale propositum iustum erit in problemate trium corporum respectu omnium potestatum excentricitatis et inclinationis corporis perturbati atque massae corporis perturbati, reiectis terminis ab excentricitate et inclinatione corporis perturbantis atque massa ipsius corporis perturbati pendentibus.

Ostenditur, quomodo et aequatione conservationis virium vivarum et aequatione una conservationem arearum concernente ordo integrationum binis unitatibus minuatur. Quod haudquaquam pro quolibet aequationum dynamicarum integrali contigit.

56.

Quoties functio U ipsam t non explicite involvit ideoque principium conservationis virium vivarum locum habet, integrale *unum*, quo principium illud continetur, ordinem differentiationum minuit *duabus* unitatibus. Sint enim rursus aequationes differentiales numero $2m$ sequentes:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i};$$

si U ideoque etiam $H = T - U$ ipsam t non continet, aequationes illae sic exhiberi possunt:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_m =$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

quae sunt aequationes differentiales $2m-1$ primi ordinis, ideoque unius aequa-

tionis differentialis $(2m-1)^{\text{ti}}$ ordinis locum tenent, quae per integrale a principio conservationis virium vivarum suppeditatum ad ordinem $(2m-2)^{\text{tum}}$ reducitur. Contra si U ideoque etiam H ipsam t continet, aequationes differentiales propositae unius aequationis ordinis $2m^{\text{ti}}$ locum tenent.

Si insuper principium conservationis arearum respectu plani cuiusdam dati locum habet, ordo differentiationum rursus duabus unitatibus minuitur, siquidem semper statuitur ordo differentiationum systematis aequationum differentialium vulgarium idem atque unius aequationis inter duas variabiles, ad quam per regulas notas eliminationis systema aequationum differentialium revocari potest, sive etiam idem atque numerus constantium arbitrariarum, quas poscit integratio completa. Sumatur enim planum datum ut planum coordinatarum x et y, ac statuatur rursus

$$x_i = r_i \cos v_i, \qquad y_i = r_i \sin v_i;$$

casu quem consideramus continebunt aequationes propositae differentialia quidem prima et secunda singulorum angulorum v_i, sed ipsorum v_i tantum differentias. Iam per integrale, quod casu proposito principium arearum concernit, fit, designante α constantem arbitrariam,

$$\alpha = \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt},$$

unde posito

$$u_i = v_i - v_n, \qquad R = \Sigma m_i r_i^2, \qquad N = \Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt},$$

fit

$$(1.) \qquad \alpha = R\frac{dv_n}{dt} + \Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} = R\frac{dv_n}{dt} + N.$$

Si in aequatione, qua principium conservationis virium vivarum continetur,

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 \right\} = U + h,$$

in qua h est constans arbitraria, substituimus valores $v_i = u_i + v_n$, fit illa:

$$\Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \right\} + 2\frac{dv_n}{dt}\Sigma m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} + R\left(\frac{dv_n}{dt}\right)^2 = U + h,$$

sive e (1.)

$$(2.) \qquad \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2 \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \right\} + \frac{\alpha^2 - N^2}{R} = U + h.$$

Si in aequationibus differentialibus substituuntur valores

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{\alpha - N}{R},$$

exulavit quantitas v_n simul cum eius differentialibus, quum aequationes conditionales atque functio U tantum quantitates z_i, r_i, u_i contineant, unde numerus variabilium unitate, ideoque ordo differentiationum duabus unitatibus minuitur. Generaliter, quoties in aequationibus differentialibus propositis variabiles ita eligere licet, ut in iis una ex earum numero non ipsa sed tantum eius bina differentialia prima obveniant, quum novum integrale generaliter invenire licet, tum uno integrali novo invento ordo differentiationum *duabus unitatibus* diminuitur. Sit enim in aequationibus differentialibus supra propositis q_i variabilis, quae in ipsa H non invenitur, habetur

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

ideoque novum integrale

$$p_i = \text{Const.}\,.$$

Reiecta deinde aequatione

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

atque considerata p_i in reliquis aequationibus differentialibus ut constante, sicuti inventum est, numerus variabilium q et p ideoque *ordo* differentiationum duabus unitatibus diminutus est.

Etiam in casu, quem §. antec. tractavi, si integrale (8.) §. 55 locum habet, ordo differentiationum duabus unitatibus diminuitur. Nam si statuuntur ut variabiles r_i, w_i, z_i, $r_i' = \frac{dr_i}{dt}$, $w_i' = \frac{dw_i}{dt}$, $z_i' = \frac{dz_i}{dt}$, atque aequationes (10.) §. 55 omnes per unam ex earum numero dividuntur, ipsa t atque elementum dt in aequationibus differentialibus non inveniuntur, ordoque differentiationum unitate diminuitur, qui deinde per integrale (8.) §. 55 altera adhuc unitate diminuitur, prorsus simili ratione atque vidimus, quoties principium conservationis virium vivarum locum habeat, ordinem differentiationum per principium illud atque eliminationem elementi temporis duabus unitatibus diminui.

At non omnibus casibus, quoties habetur integrale novum, simili ratione atque in praecedentibus exemplis ordinem differentiationum scita variabilium electione duabus unitatibus deprimere licet. Ita non fit, ut altero et tertio integrali, quod principium arearum concernit, duas variabiles cum earum differentialibus eliminare liceat ideoque *quatuor* unitatibus iste ordo deprimatur. Sunt tantum praecedentia exempla simplicissima, in quibus iam absque theoria supra condita illa depressio ordinis differentiationum sponte se offert. Theoria

autem supra condita docet, semper variabilium systema investigari posse, pro quibus ordo differentiationum duabus unitatibus inferior evadat; sed generaliter illa investigatio secundum praecepta tradita postulat, ut alia condantur systemata aequationum differentialium, quae inferiorum ordinum sunt, atque singulorum istorum systematum auxiliarium integrale unum quodcunque indagetur.

Systema propositum aequationum differentialium vulgarium vocatur canonicum. Cuiusmodi systema in aliud canonicum transformatur. Quod una cum transformatione aequationis differentialis partialis valde generali peragitur. Canonicum elementorum systema.

57.

Revertor ad formulas perturbationum §. 52 traditas. Videmus, aequationes §. 52 (7.), in quibus elementa perturbata ut variabiles introducta sunt, prorsus eadem forma gaudere atque ipsas aequationes differentiales §. 52 (5.). Formam autem illam memorabilem, qua utrumque systema aequationum differentialium gaudet, quia frequenter in his aequationibus obvenit, dicam aequationum differentialium formam *canonicam*. Sunt in eiusmodi systemate canonico aequationum differentialium vulgarium variabiles numero pari, atque altera pars semissis variabilium alteri semissi singulae singulis ita respondent, ut differentialia illarum variabilium aequalia sint differentialibus partialibus certae cuiusdam functionis secundum has variabiles sumtis, et harum variabilium differentialia aequalia sint eiusdem functionis differentialibus partialibus secundum illas variabiles sumtis atque insuper signo negativo affectis.

His positis transformatio illa, qua vidimus §§. 52, 53 aequationes

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{dq_i}$$

mutari in has:

$$\frac{db_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}, \qquad \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

continetur sub problemate generali, *quodcunque systema aequationum differentialium, quod canonica forma gaudeat, in aliud eiusdem formae per introductionem novarum variabilium transformare.* Quod problema etiam ratione prorsus diversa proponere licet.

Comprobavi enim antecedentibus integrationem systematis aequationum differentialium:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

in qua maioris generalitatis gratia supponam, praeter quantitates q_i, p_i etiam ipsam t functionem f explicite ingredi, pendere ab integratione aequationis

differentialis partialis, quae provenit ex aequatione

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + f^*),$$

substituendo in functione f in locum quantitatum p_i differentialia functionis V partialia respectu quantitatum q_i sumta, sive statuendo

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Inventa enim functione V, aequationi illi differentiali partiali satisfaciente atque involvente m constantes arbitrarias a_i, praeter unam ipsi V mera additione adiungendam, erant integralia completa aequationum:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

sequentia:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

designantibus b_i novas constantes m arbitrarias. Videmus igitur, inter systematis canonici aequationum differentialium vulgarium et aequationis differentialis partialis integrationem arctissimum nexum intercedere. *Unde alterius transformatio statim etiam alterius transformationem suppeditabit.*

In promptu est aequationis differentialis partialis transformatio, si tantum in locum variabilium *independentium* aliae variabiles independentes introducuntur. *Neque alias transformationes hactenus considerasse videntur Analystae* **). Sed dantur etiam transformationes aequationis differentialis partialis primi ordinis alius in aliam primi ordinis per substitutiones, in quibus expressiones variabilium independentium alterius aequationis continent quum variabiles independentes alterius tum differentialia secundum eas sumta partialia. Methodus generalis eiusmodi efficiendi transformationem haec est:

Proposita sit aequatio:

$$(1.) \qquad dV_1 = -f_1\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m,$$

in qua

$$(2.) \qquad f_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial t}$$

sit data functio ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ atque ipsarum

$$p_1 = \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}.$$

---

*) Constantem a §. 35 (3.) additam hic quod licet $= 0$ posui.

**) quarum tamen specimen quoddam offert *Euleriana* illa methodus qua variabiles independentes cum differentialibus secundum illas sumtis commutantur. *C.*

Aequatio (1.) locum tenet aequationis differentialis partialis (2.), atque in locum aequationis (2.) licet aequationem (1.) transformare. Ad quam efficiendam transformationem assumo functionem *prorsus arbitrariam* V ipsarum $t, q_1, q_2, \dots q_m$, atque novarum variabilium $a_1, a_2, \dots a_m$. Quae determinentur novae variabiles per ipsas $t, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ ope aequationum:

$$(3.) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \qquad \dots \qquad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

ac praeterea statuatur

$$(4.) \qquad -\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \qquad -\frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \qquad \dots \qquad -\frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m.$$

His positis fit:

$$(5.) \qquad \begin{cases} dV = \dfrac{\partial V}{\partial t} dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_m dq_m \\ \qquad\qquad - b_1 da_1 - b_2 da_2 - \dots - b_m da_m. \end{cases}$$

Qua aequatione subducta de (1.) positoque

$$(6.) \qquad V_1 - V = W,$$

nanciscimur:

$$(7.) \qquad dW = -\left\{ f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \dots + b_m da_m.$$

Transformationem generalem aequationis differentialis partialis primi ordinis, quae antecedentibus continetur, theoremate particulari proponere convenit.

Theorema VIII.

Sint $t, q_1, q_2, \dots q_m$ ***variabiles independentes, inter quas et functionem earum*** V_1 ***proposita sit aequatio differentialis partialis:***

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V_1}{\partial q_m}\right) = 0;$$

assumatur functio prorsus arbitraria V ***ipsarum*** $t, q_1, q_2, \dots q_m$ ***et novarum variabilium*** $a_1, a_2, \dots a_m$***; atque in locum quantitatum*** $q_1, q_2, \dots q_m$***, introducendo quantitates***

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2}, \qquad \dots \qquad \frac{\partial V}{\partial a_m},$$

exprimamus quantitates sequentes:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2}, \qquad \dots \qquad \frac{\partial V}{\partial q_m},$$

atque si in f_1 *loco* $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$ *scribimus* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, functionem

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$$

per quantitates

$$t, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_1}, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad -\frac{\partial V}{\partial a_m};$$

quo facto fiat:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right) = \varphi\left(t, a_1, a_2, \ldots a_m, -\frac{\partial V}{\partial a_1}, -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots -\frac{\partial V}{\partial a_m}\right);$$

his omnibus transactis, si in functione φ *loco* $-\frac{\partial V}{\partial a_i}$ *scribitur* $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, *erit aequatio differentialis partialis proposita transformata in sequentem:*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\left(t, a_1, a_2, \ldots a_m, \frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial a_m}\right) = 0,$$

atque alterius solutio ex alterius invenitur solutione ope aequationis:

$$V_1 = V + W,$$

siquidem aut cognita solutione V_1 *variabiles* $q_1, q_2, \ldots q_m$ *exprimuntur per* $a_1, a_2, \ldots a_m, t$ *ope aequationum*

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m},$$

aut cognita solutione W *variabiles* $a_1, a_2, \ldots a_m$ *exprimuntur per* $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ *ope aequationum:*

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = -\frac{\partial V}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = -\frac{\partial V}{\partial a_m}.$$

Demonstratio theorematis antecedentibus tradita eo nititur, quod positis aequationibus

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V_1}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m}$$

inde sponte sequuntur hae aequationes:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -\frac{\partial W}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -\frac{\partial W}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -\frac{\partial W}{\partial a_m},$$

quod etiam inverti potest.

Transformatio generalis systematis canonici aequationum differentialium vulgarium theoremati praecedenti respondens hoc theoremate continetur:

Theorema IX.

Proposito systemate aequationum differentialium vulgarium canonico:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_m}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial p_m}{\partial t} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_m},$$

in qua f_1 est functio ipsarum t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m quaecunque, assumatur functio arbitraria V quantitatum t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m atque novarum variabilium a_1, a_2, $\ldots$ a_m; quo facto condantur aequationes:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m,$$

quarum ope exprimantur et variabiles q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m et functio

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

per t et novas variabiles a_1, a_2, $\ldots$ a_m, b_1, b_2, $\ldots$ b_m; inventa expressione

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

systema aequationum differentialium vulgarium canonicum in aliud canonicum hoc per substitutiones propositas transformatur:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_m},$$

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Theorematis praecedentis gravissimi demonstratio, quamquam iam in quaestionibus supra traditis continetur, si breviter denuo adstruere placet, haec habetur.

E systemate canonico proposito fluunt aequationes symbolicae sequentes, siquidem formularum notarum

$$\delta \cdot \frac{dq_i}{dt} = \frac{d \cdot \delta q_i}{dt}, \quad \delta \cdot \frac{dp_i}{dt} = \frac{d \cdot \delta p_i}{dt}, \quad \delta \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d \cdot \delta V}{dt}$$

recorderis:

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{dq_i}{dt}\delta p_i - \frac{dp_i}{dt}\delta q_i\right)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{dq_i}{dt}\,\delta\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d\frac{\partial V}{\partial q_i}}{dt}\delta q_i\right)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \Sigma_i\left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt}\right) - \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial q_i}\,\delta q_i}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \delta\cdot\frac{dV}{dt} - \frac{d.\delta V}{dt} - \delta\cdot\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt}$$
$$- \Sigma_i\left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\,\frac{da_i}{dt}\right) - \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i}\,\delta a_i}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t - \delta\cdot\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt}$$
$$- \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\,\delta\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i} - \delta a_i\frac{d\cdot\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{d.(\varphi - f_1)}{dt}\right)\delta t - \delta(\varphi - f_1)$$
$$+ \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\delta a_i\right).$$

Unde quum e systemate canonico proposito sequatur:

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t},$$

invenimus:

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\delta t + \Sigma_i\left(\frac{da_i}{dt}\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\delta a_i\right).$$

Quae aequatio symbolica systema canonicum transformatum suppeditat, atque insuper aequationem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

quae ex illo sequitur.

Unde functione W per ipsas t, a_1, a_2, ... a_m expressa, fit:

(8.) $$\frac{\partial W}{\partial t} = -\left\{f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}\right\},\quad \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1,\quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Eliminatis quantitatibus q_i, p_i ex expressione $f_1+\frac{\partial V}{\partial t}$ ope aequationum (3.) et (4.), evadit illa functio ipsarum t, a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m, quam statuamus:

$$f_1+\frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m),$$

eritque substitutis ipsarum b_i expressionibus $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, e (8.):

$$(9.) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -\varphi\left(t, a_1, a_2, \ldots a_m, \frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial a_m}\right).$$

Quae est aequatio differentialis partialis transformata, quae locum tenet aequationis differentialis partialis propositae (2.). Eritque prorsus eadem substitutione (3.) et (4.) systema canonicum aequationum differentialium vulgarium propositum in aliud canonicum transformatum.

Transformatione generali theoremate antecedente proposita, continetur illa in qua ut variabiles novae statuuntur elementa problematis approximati. Sit enim in theoremate illa

$$(10.) \qquad f_1 = f+\Omega,$$

sintque functiones f et V ita comparatae, ut substitutis in f loco ipsarum p_i expressionibus $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, prodeat

$$(11.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = -f;$$

considerari possunt quantitates a_1, a_2, ... a_m tamquam *constantes arbitrariae*, quae afficiunt solutionem V aequationis differentialis partialis

$$\frac{\partial V}{\partial t}+f = 0,$$

ideoque ex iis, quae supra probata sunt, considerari possunt a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m ut *elementa constantia*, quae afficiunt integralia completa

$$(12.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, & \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m \end{cases}$$

aequationum differentialium

$$(13.) \qquad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, & \ldots & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Quoties igitur vice versa in aequationibus (12.) ipsae a_i, b_i ut constantes considerantur, sunt aequationes illae (12.) integralia completa aequationum (13.). Quoties vero in aequationibus (12.) ipsae a_i, b_i ut variabiles considerantur, quae in locum ipsarum q_i, p_i ope aequationum illarum substituendae sunt, docet theorema propositum, transformari ea substitutione aequationes

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_i}$$

in aequationes sequentes:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_i}.$$

Habemus enim casu proposito:

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = f_1 - f = \Omega.$$

Quae sunt formulae differentiales elementorum perturbatorum, quae a supra propositis tantum eo discrepant, quod in iis $-b_i$ loco b_i scriptum sit. *Systema elementorum, quae in modum praecedentium per aequationes differentiales canonicas determinantur, et ipsum dicere convenit canonicum elementorum systema.*

De transformatione systematis elementorum canonici in aliud canonicum.

58.

In antecedentibus duae functiones, quarum differentialia partialia sumenda sunt in formandis systematibus canonicis proposito et transformato, inter se differunt. Quoties vero functio V, quae in praecedentibus ex arbitrio assumi poterat ipsam t non continet, erit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

ideoque $f_1 = \varphi$, sive in utroque systemate canonico functio illa eadem erit. Eo casu etiam relationes, quibus novae variabiles e variabilibus primordialibus determinantur, ipsam t non involvunt. Unde si variabiles sunt elementa problematis approximati, etiam novae variabiles non nisi aliud systema elementorum eiusdem problematis approximati erunt. Quodsi igitur formulas differentiales elementorum perturbatorum hac ratione iterum transformamus, *nanciscimur modum maxime generalem, quo systema elementorum canonicum in alterum systema elementorum canonicum transformetur.* Habemus enim e theoremate, permutando ipsas q_i, p_i, a_i, b_i, resp. cum a_i, b_i, α_i, β_i propositionem sequentem:

Theorema IX^{a}.

Sint formulae differentiales elementorum perturbatorum, designante Ω functionem perturbatricem:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b_m},$$
$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a_m};$$

sint $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ functiones elementorum praecedentium $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$, quae, designante φ functionem quamlibet ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ab illis pendeant per aequationes:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_m} = -\beta_m,$$

determinantur elementa nova per systema aequationum differentialium prorsus simile:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_m},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_m}.$$

Transformatio generalis elementorum canonicorum, quae ope functionis arbitrariae theoremate praecedenti efficitur, redit in methodam notam, qua e solutione *completa* aequationis differentialis partialis primi ordinis deducitur solutio functionem arbitrariam involvens, quae dicitur *generalis*. Sit enim V solutio aequationis differentialis partialis, ad cuius integrationem e theoria hic exposita reducatur problema approximatum, atque involvat V constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_m$, ita ut sint

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m$$

aequationes finitae problematis approximati et quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ eius elementa canonica. In locum solutionis V etiam scribere licet $V+\varphi$, designante φ constantem; de qua solutione completa deducitur generalis, si constans φ statuitur functio arbitraria constantium $a_1, a_2, \ldots a_m$, atque differentialia partialia expressionis $V+\varphi$ respectu ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m$ sumta nihilo aequiparantur. Statuamus functionem ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m$ arbitrariam involvere praeter has quantitates alias constantes arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$;

eliminatis e $V+\varphi$ ope aequationum

$$-\frac{\partial V}{\partial a_1}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \qquad -\frac{\partial V}{\partial a_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \qquad \ldots \qquad -\frac{\partial V}{\partial a_m}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

quantitatibus a_1, a_2, ... a_m, habebitur nova solutio $V+\varphi$, alias m constantes arbitrarias involvens. Etiam de hac deduci possunt aequationes finitae problematis approximati, quippe quae erunt:

$$-\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial \alpha_1}=\beta_1, \qquad -\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial \alpha_2}=\beta_2, \qquad \ldots \qquad -\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial \alpha_m}=\beta_m.$$

Sed quantitates α_i functionem $V+\varphi$ tantum afficiunt, quatenus in ipsis a_i continentur ac praeter has explicite in functione φ; differentialia autem functionis $V+\varphi$ respectu ipsarum a_i sumta supposuimus evanescere; unde erit

$$\frac{\partial(V+\varphi)}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i},$$

sive aequationes novae finitae problematis habentur:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}=-\beta_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}=-\beta_2, \qquad \ldots \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}=-\beta_m;$$

eruntque α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m nova elementa canonica determinata e primordialibus per has aequationes et illas supra assumtas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}=-\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i.$$

Elementa autem nova canonica inventa si in problemate perturbato tamquam variabiles spectantur, eorum differentialia expressionibus similibus aequalia evadere debent atque elementorum primordialium. Q. D. E.

Transformatio ea, quae in §§. antecedentibus tradita est, etiam generalior proponitur.

59.

Sed quanta generalitate gaudeat transformatio aequationis differentialis partialis primi ordinis et quae inde pendeat systematis canonici aequationum differentialium vulgarium supra §. 57 proposita, sunt tamen aliae, quas illa transformatio non amplectatur. Scilicet adhuc sequentes addendae sunt.

Sit rursus aequatio transformanda:

$$dV_1 = -f_1 dt+p_1 dq_1+p_2 dq_2+\cdots+p_m dq_m,$$

in qua f_1 est data functio ipsarum t, q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m; sit etiam V rursus functio ex arbitrio assumta ipsarum t, q_1, q_2, ... q_m, a_1, a_2, ... a_m, inter quas vero quantitates iam statuamus insuper locum habere aequationes:

$$F=0, \quad \Phi=0, \quad \ldots\ldots$$

Tum, posito rursus $V_1 - V = W$, erit aequatio transformata:

$$dW = -\varphi\, dt + b_1\, da_1 + b_2\, da_2 + \cdots + b_m\, da_m,$$

siquidem ponitur:

$$\begin{aligned}
\varphi &= f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \cdots \\
0 &= p_1 - \frac{\partial V}{\partial q_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \cdots \\
0 &= p_2 - \frac{\partial V}{\partial q_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= p_m - \frac{\partial V}{\partial q_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_m} + \cdots \\
b_1 &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \cdots \\
b_2 &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_m &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} + \cdots
\end{aligned}$$

Ex his aequationibus, quibus ipsae addantur $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., eliminatis λ_1, λ_2, ... determinandae sunt q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m per a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m, earumque valores in expressione ipsius φ substituendae.

Si multiplicatores λ_1, λ_2, ... evitare placet neque tamen symmetriae formularum derogare, transformationem etiam sic proponere licet. Aequationibus enim $F = 0$, $\Phi = 0$, ... inter quantitates q_i, a_i, t assumtis, quarum numerus sit $m-k$, sint r_1, r_2, ... r_k functiones quaelibet ipsarum t, q_1, q_2, ... q_m, a_1, a_2, ... a_m; licet omnes q_1, q_2, ... q_m per ipsas t, a_1, a_2, ... a_m atque novas quantitates r_1, r_2, ... r_k exprimere, quae expressiones eliminatis r_1, r_2, ... r_k suppeditabunt $m-k$ aequationes inter ipsas q_1, q_2, ... q_m, a_1, a_2, ... a_m, t.

Aequationes $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., quum ex arbitrio assumi possint, iam earum in locum statuere licet, ipsas q_1, q_2, ... q_m esse functiones arbitrarias quantitatum t, a_1, a_2, ... a_m, r_1, r_2, ... r_k. Quibus electis, sit

$$\begin{aligned}
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i} &= R_i, \\
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i} &= A_i, \\
p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial t} &= T.
\end{aligned}$$

Unde erit:

$$\begin{aligned} dV_1 &= -f_1\,dt+p_1\,dq_1+p_2\,dq_2+\cdots+p_m\,dq_m \\ &= -(f-T)\,dt+R_1\,dr_1+R_2\,dr_2+\cdots+R_k\,dr_k \\ &\qquad +A_1\,da_1+A_2\,da_2+\cdots+A_m\,da_m. \end{aligned}$$

Assumta iam ex arbitrio ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k, t$ functione V, statuatur:

$$f_1-T+\frac{\partial V}{\partial t} = \varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_1}=R_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial r_2}=R_2, \quad \ldots \qquad \frac{\partial V}{\partial r_k}=R_k$$

$$A_1-\frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1, \quad A_2-\frac{\partial V}{\partial a_2}=b_2, \quad \ldots \quad A_m-\frac{\partial V}{\partial a_m}=b_m;$$

erit

$$d(V_1-V)=dW=-\varphi\,dt+b_1\,da_1+b_2\,da_2+\cdots+b_m\,da_m.$$

Ex aequationibus $m+k$:

$$p_1\frac{\partial q_1}{\partial r_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial r_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial r_i}=R_i=\frac{\partial V}{\partial r_i}$$

$$p_1\frac{\partial q_1}{\partial a_i}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial a_i}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial a_i}=A_i=\frac{\partial V}{\partial a_i}+b_i$$

et per resolutionem aequationum linearium determinantur $p_1, p_2, \ldots p_m$ per $r_1, r_2, \ldots r_k, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, et eliminatis $p_1, p_2, \ldots p_m$ habentur k aequationes inter ipsas $r_1, r_2, \ldots r_k, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, quarum ope ipsae $r_1, r_2, \ldots r_k$ ideoque etiam $p_1, p_2, \ldots p_m, q_1, q_2, \ldots q_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ determinari possunt. Qui deinde valores in expressione φ substituendi sunt, ut illa solarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ functio evadat. Transformata autem aequatione

$$dV_1 = -f_1\,dt+p_1\,dq_1+p_2\,dq_2+\cdots+p_m\,dq_m$$

in hanc

$$dW = -\varphi\,dt+b_1\,da_1+b_2\,da_2+\cdots+b_m\,da_m,$$

in quibus f_1 est ipsarum $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, atque φ ipsarum $t, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ functio, simul aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial t}+f_1=0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}+\varphi=0$$

altera in alteram transformatae sunt. Substitutis in f_1 loco ipsarum p_i expressionibus $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, in φ loco ipsarum b_i expressionibus $\frac{\partial V}{\partial a_i}$, evadunt aequa-

tiones illae aequationes differentiales partiales, quarum igitur iam per methodum propositam transformationes novas nacti sumus.

Si $k=m$, transformatio eadem obtinetur atque §. 57. Transformationes, quas ex antecedentibus pro $k<m$ obtinemus, etiam novas transformationes systematum canonicorum aequationum differentialium vulgarium suppeditant. Et similiter atque in §. antec. etiam systematum elementorum canonicorum novas inde eruimus transformationes. Quas transformationes, singulas binis modis, sequentibus theorematibus proponam.

Theorema X.

Designante i numeros 1, 2, ... *m propositum sit systema aequationum differentialium vulgarium:*

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial f_1}{\partial q_i};$$

assumatur functio arbitraria V ipsarum t, q_1, q_2, ... q_m *novarumque variabilium* a_1, a_2, ... a_m, *inter quas quantitates* $2m+1$ *statuatur locum habere aequationes quascunque*

$$F=0, \quad \Phi=0, \quad \ldots;$$

condantur porro aequationes $2m+1$ *sequentes:*

$$\varphi = f_1+\frac{\partial V}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial t}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\cdots,$$

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial q_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}-\cdots,$$

$$-b_i = \frac{\partial V}{\partial a_i}-\lambda_1\frac{\partial F}{\partial a_i}-\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}-\cdots,$$

quarum aequationum ope, advocatis ipsis $F=0$, $\Phi=0$, ..., *et eliminari possunt multiplicatores* λ_1, λ_2, ..., *et determinantur* $2m$ *quantitates* q_i *et* p_i *nec non functio* φ *per ipsam* t *atque* $2m$ *novas quantitates* a_i, b_i; *qui ipsorum* q_i, p_i *valores si substituuntur in systemate proposito aequationum differentialium vulgarium, transformatur illud in sequens:*

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt}=-\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}.$$

Porro, in locum ipsorum p_i, b_i *scribendo* $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, *ubi conduntur aequationes differentiales partiales*

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0,$$

alterius solutio ex alterius obtinetur solutione per aequationem:

$$V_1 = V + W.$$

Theorema XI.

Designante i numeros 1, 2, ... *m, data sint differentialia elementorum problematis alicuius perturbati per aequationes:*

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i},$$

designante Ω functionem perturbatricem; assumatur functio arbitraria V elementorum a_1, a_2, ... a_m novarumque quantitatum α_1, α_2, ... α_m; condantur porro aequationes $2m$ sequentes:

$$b_i = \frac{\partial V}{\partial a_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \cdots,$$

$$-\beta_i = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} - \cdots,$$

quarum aequationum ope, advocatis ipsis $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., et eliminari possunt multiplicatores λ_1, λ_2, ... et determinantur $2m$ elementa a_i, b_i per novum systema elementorum α_i, β_i; quae elementa nova si etiam in functionem perturbatricem Ω loco ipsorum a_i, b_i introducuntur, inveniuntur differentialia elementorum novi systematis α_i, β_i per formulas:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

Obtinetur theorema praecedens e theoremate X. statuendo, functiones V, F, Φ, ... ipsam t non involvere, et permutando p_i, q_i cum b_i, a_i, atque b_i, a_i cum β_i, α_i. Theoremata praecedentia etiam hanc alteram formam induere possunt:

Theorema X^a.

Designante i numeros 1, 2, ... *m, propositum sit systema aequationum differentialium vulgarium:*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_i};$$

statuantur quantitates q_1, q_2, ... q_m aequales expressionibus quibuscunque ipsius t novarumque quantitatum a_1, a_2, ... a_m, r_1, r_2, ... r_k, designante k numerum aut ipsi m aequalem aut ipso m minorem; assumatur deinde

functio arbitraria V earundem quantitatum $a_1, a_2, \ldots a_m, r_1, r_2, \ldots r_k, t$, atque condantur aequationes $m+k$:

$$\frac{\partial V}{\partial r_i} = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i},$$

$$b_i + \frac{\partial V}{\partial a_i} = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i};$$

per quas determinentur quantitates $r_1, r_2, \ldots r_k, p_1, p_2, \ldots p_m$ per quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$, unde etiam quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m$ per easdem quantitates determinatae erunt; quibus substitutis quantitatum r_i, q_i, p_i expressionibus per easdem quantitates $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ etiam exhibeatur functio

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \left\{ p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial t} \right\};$$

quibus factis si expressiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t$ inventae substituuntur in systemate aequationum differentialium propositarum, obtinebitur hoc similis formae:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_i};$$

simul aequationes differentiales partiales

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0,$$

quae obtinentur ponendo in altera $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$ loco p_i, in altera $\frac{\partial W}{\partial a_i}$ loco b_i, per easdem aequationes altera in alteram transformantur, et alterius solutio ex alterius habetur per aequationem

$$V_1 = W + V.$$

Theorema XI^a.

Designante i numeros $1, 2, \ldots m$, data sint differentialia elementorum problematis alicuius perturbati per aequationes

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i},$$

designante Ω functionem perturbatricem; statuantur elementa $a_1, a_2, \ldots a_m$ aequalia expressionibus quibuscunque novarum quantitatum $m+k$,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_k, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots \quad \varepsilon_k,$$

designante k numerum aut ipsi m aequalem aut ipso m minorem; assumta

deinde functione arbitraria V earundem m+k quantitatum, formentur aequationes m+k

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \varepsilon_i},$$

$$\beta_i + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i};$$

per quas determinentur m+k quantitates $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k, b_1, b_2, \ldots b_m$ *per quantitates novas* $2m$*:*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m,$$

unde etiam $a_1, a_2, \ldots a_m$ *per easdem quantitates determinatae erunt; quae expressiones elementorum* $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ *per nova elementa* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ *si substituuntur in functione perturbatrice* Ω*, habentur differentialia novi elementorum systematis per formulas similes:*

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

Haec altera theorematum forma commodior est, quoties in priore forma numerus aequationum $F = 0$, $\Phi = 0$, ... valde magnus habetur.

De casu quodam simplicissimo, quo e systemate elementorum canonico aliud ejusmodi systema eruatur.

60.

Paucis agam de transformationibus simplicissimis, quarum tamen frequentissimus usus erit, alius systematis canonici elementorum in aliud canonicum. Sunt elementa canonica, quorum differentialia huiusmodi aequationibus exprimuntur:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \qquad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i},$$

quarum aequationum integratio redit in integrationem aequationis differentialis partialis:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega,$$

siquidem in functione perturbatrice Ω loco ipsorum $b_1, b_2, \ldots b_m$ ponitur $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial a_m}$, sive quod idem est, redit integratio aequationum differentialium vulgarium praecedentium in integrationem aequationis:

$$dV = -\Omega\, dt + b_1\, da_1 + b_2\, da_2 + \cdots + b_m\, da_m.$$

Vocemus duas classes systematis canonici elementorum, alteram, ipsas $a_1, a_2, \ldots a_m$

amplectentem, *positivam classem*, alteram, ipsas b_1, b_2, ... b_m amplectentem *negativam classem*. Elementa bina a_i et b_i vocemus coniugata. Bina elementa coniugata systematis simul ex altera classi in alteram transeunt, si *alterius elementi signum mutatur*. Si functiones quascunque elementorum, quae ad alteram tantum classem pertinent, ut nova elementa illius classis introducere placet, facillime alterius classis elementa, quae novis illis coniugata sunt, determinantur. *Sint ex. gr. classis positivae elementa* a_1, a_2, ... a_m *expressa per alias quantitates* α_1, α_2, ... α_m, *quae ut nova elementa classis positivae spectentur; posito*

$$\beta_i = b_1\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2\frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m\frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i},$$

erit

$$dV = -\Omega dt + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \cdots + \beta_m d\alpha_m.$$

Unde considerari debent quantitates β_i *ut nova elementa alterius classis, eritque elementum* β_i *ipsi* α_i *conjugatum, sive erit:*

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i} = \frac{d\alpha_i}{dt}, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i} = -\frac{d\beta_i}{dt}.$$

In propositione praecedente loco a_i, α_i ponere licet $-b_i$, $-\beta_i$ simulque loco b_i, β_i ponere a_i, α_i. Unde fluit altera propositio, *expressis* b_i *per alia elementa* β_i, *elementa classis positivae, ipsis* β_i *coniugata, fieri*

$$\alpha_i = a_1\frac{\partial b_1}{\partial \beta_i} + a_2\frac{\partial b_2}{\partial \beta_i} + \cdots + a_m\frac{\partial b_m}{\partial \beta_i}.$$

Si hunc transformationis modum una cum illo qui sola mutatione signi unius seu plurium elementorum efficitur, vicissim iterum iterumque adhibes, iam hac via simplicissima ex uno systemate elementorum canonico diversissima alia deducere licet.

Ut per methodum generalem supra traditam eruatur transformatio illa simplicissima, qua bina elementa coniugata, ex. gr. a_1 et b_1, alterum in alterius classem transeunt, statuatur

$$V_0 = a_1\alpha_1, \qquad b_1 = \frac{\partial V_0}{\partial a_1} = \alpha_1;$$

erit

$$d(V - V_0) = -\Omega dt - a_1 d\alpha_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

quae docet aequatio, si loco ipsius a_1 introducatur $\alpha_1 = b_1$, elementum coniugatum quod erat b_1 fieri $-a_1$, q. d. e.

Transformationes antecedentes, variabili t et ipsa mutata, ad summam generalitatem perducuntur.

61.

In §§. 57., 59. transformationum aequationum differentialium partialium generalitatem eo restrinximus, quod unam variabilium independentium immutatam reliquimus. Quam restrictionem si missam facimus, ita agendum est.

Sit rursus

$$dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

atque V functio arbitraria ipsorum $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ atque novarum $a_1, a_2, \ldots a_m, \tau$: fit aequatio transformata

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

siquidem statuitur:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m.$$

Ex his aequationibus determinandae sunt $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ per $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_m, \tau$ atque valores eruti substituendi in expressione $\frac{\partial V}{\partial \tau}$, quo facto erit

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m$$

aequatio transformata. Si in modum §. 59. introducuntur aequationes $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ inter ipsas $q_1, q_2, \ldots q_m, t, a_1, a_2, \ldots a_m, \tau$, nil in praecedentibus mutabitur, nisi quod loco ipsius V ponendum sit $V - \lambda_1 F - \lambda_2 \Phi - \cdots$, cuius expressionis differentialia partialia multiplicatorum $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ non continent differentialia, ut quae in expressiones $F, \Phi, \ldots$ evanescentes ducta sunt.

Ut e propositione praecedente generaliori deducatur casus, quo variabilis independens t immutata manet, scribatur in locum ipsius V expressio

$$V + (\tau - t) f_1,$$

designante V functionem ab ipsa t vacuam. Quo facto aequatio

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f_1$$

abit in

$$(\tau - t) \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,$$

unde deducitur

$$\tau = t.$$

Reiectis igitur post differentiationes factas terminis in $\tau - t$ ductis ut evanescentibus, mutato V in $V+(\tau-t)f_1$, abit $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ in $\frac{\partial V}{\partial \tau}+f_1$, differentialia $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ non mutantur. Unde si postremo t loco τ scribitur, facile patet, quomodo e praecedente propositione generaliori deducantur eae, quae §§. antecedentibus traditae sunt.

Si aequatio differentialis partialis proposita ipsam functionem quaesitam V_1 continet, ita agendum est. Sit

$$dV = -f dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m.$$

atque contineat f praeter variabiles t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m adhuc ipsam V; assumatur ipsarum V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, a_1, a_2, $\ldots$ a_m, τ functio quaelibet W; erit

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \tau} d\tau + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

siquidem statuitur:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial V} f, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \qquad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Ex his $2m+1$ aequationibus, advocata ipsa functionis W expressione ex arbitrio assumta, determinandae sunt V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, p_1, p_2, $\ldots$ p_m per W, τ, a_1, a_2, $\ldots$ a_m, b_1, b_2, $\ldots$ b_m, ac valores inventi in expressione ipsius $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ substituendi, quo facto aequatio differentialis praecedens erit aequatio transformata. Si inter ipsas V, t, q_1, q_2, $\ldots$ q_m, τ, a_1, a_2, $\ldots$ a_m aequationes $F=0$, $\Phi=0$, $\ldots$ locum habere statuis, tantum necesse est, ut in praecedentibus loco ipsius W ponatur $W+\lambda_1 F+\lambda_2 \Phi+\cdots$.

Haec sunt maxime generalia, quae de transformatione aequationum differentialium partialium primi ordinis inter numerum quemcunque variabilium praecipere licet.

Agitur de usu integralis cuiuslibet systematis aequationum differentialium vulgarium, quod non eam in seriem integralium redeat, quam methodus supra proposita sibi poscat.

62.

Adnotavi supra §. 56., si principium conservationis arearum respectu certi cuiusdam plani locum habeat, unam variabilem cum eius differentiali prorsus ex aequationibus differentialibus abire, ideoque ordinem differentiationum unitatibus duabus diminui; idem vero, quod pro uno integrali illo fit, non evenire pro secundo et tertio integrali, quod datur, si principium conservationis arearum respectu *cuiuslibet* plani locum habet. Quaeramus iam, quemnam alium usum e tribus illis integralibus percipere liceat in ea integrationis via, quam supra proposuimus. Eum in finem antemitto has considerationes generales. Antea autem processum generalem integrationum, qualis e supra traditis habetur, paucis repetam.

Proposita integratione aequationum differentialium

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

in quibus f est data functio ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, e praeceptis supra traditis ita agendum erat.

Integrale *primum* sponte habetur per aequationem

$$f = a,$$

in qua a est constans arbitraria. Integrale *secundum* habetur $H_1 = a_1$, si datur functio H_1, quae identice satisfacit aequationi

$$(1.) \qquad 0 = [H_1, f],$$

siquidem semper statuitur

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Iam e praeceptis traditis non integrale tertium quodcunque investigandum est seu functio H_2 quaecunque satisfaciat aequationi

$$[H_2, f] = 0,$$

sed eiusmodi functio H_2, quae duabus simul satisfaciat aequationibus.

$$(2.) \qquad [H_2, f] = 0, \quad [H_2, H_1] = 0.$$

Deinde investiganda erit functio H_3, quae tribus aequationibus

$$[H_3, f] = 0, \quad [H_3, H_1] = 0, \quad [H_3, H_2] = 0,$$

functio H_4, quae quatuor aequationibus

$$[H_4, f] = 0, \quad [H_4, H_1] = 0, \quad [H_4, H_2] = 0, \quad [H_4, H_3] = 0,$$

etc. etc., denique functio H_{m-1}, quae $m-1$ aequationibus

$$[H_{m-1}, f] = 0, \quad [H_{m-1}, H_1] = 0, \quad \ldots \quad [H_{m-1}, H_{m-2}] = 0$$

satisfaciat. His inventis functionibus, integratio completa aequationum differentialium propositarum ad meras quadraturas revocata erat. Scilicet sunt m integralia aequationum differentialium propositarum ipsae aequationes,

$$f = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$

e quibus deinde si determinantur p_1, p_2, $\ldots$ p_m per q_1, q_2, $\ldots$ q_m, habentur $m-1$ reliqua integralia per formulas:

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} + b_1 = 0,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} + b_2 = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_{m-1}} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_{m-1}} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_{m-1}} dq_m \right\} + b_{m-1} = 0,$$

in quibus expressiones sub signo sunt differentialia completa, quorum igitur integratio nonnisi quadraturas poscit. Quantitates a, a_1, $\ldots$ a_{m-1}, b_1, b_2, $\ldots$ b_{m-1} sunt constantes arbitrariae.

Aequationes, quibus functio H_i definitur, ex iis quae supra §. 32 demonstravi, variis modis transformare licet. Scilicet in aequationibus

$$[H_i, f] = 0, \quad [H_i, H_1] = 0, \quad \ldots \quad [H_i, H_{i-1}] = 0$$

loco functionum f, H_1, H_2, $\ldots$ H_{i-1} alias quascunque ponere licet, in quas illae ope aequationum $f = a$, $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, $\ldots$ $H_{i-1} = a_{i-1}$ transformari possunt; nec non supponere licet, ope harum aequationum e functione quaesita H_i eliminatas esse quantitates p_1, p_2, $\ldots$ p_i. Statuantur ope earundem aequationum eliminatas esse p_1, p_2, $\ldots$ p_i ex ipsa f omnes praeter p_1, ex ipsa H_1 omnes praeter p_2, $\ldots$ ex ipsa H_{i-1} omnes praeter p_i, singulis aequationibus $f = a$, $H_1 = a_1$, $\ldots$ $H_{i-1} = a_{i-1}$ in singulis eliminationibus efficiendis respective reiectis. Tum aequationes, quibus H_i satisfacere debet, hae fiunt:

$$0 = [H_i, f] = \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

$$0 = [H_i, H_1] = \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_1}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_1}{\partial q_m},$$

. . . . . .

$$0 = [H_i, H_{i-1}] = \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_i} + \frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_m}.$$

Sit e $f = a$ ipsa p_1, e $H_1 = a_1$ ipsa p_2, ... e $H_{i-1} = a_{i-1}$ ipsa p_i expressa per p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m; possunt aequationes praecedentes sic quoque exhiberi:

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m}.$$

Hae sunt aequationes (*d.*) §. 17, quarum docui supra integrationem simultaneam §§. 19, 20, primum quaerens functionem, quae aequationi primae, deinde quae duabus primis, deinde quae tribus primis etc. satisfaciat. Sed interdum fieri potest, ut alia via determinandi functionem H_i commodius ineatur, cuius rei exemplum simplicissimum prodam.

63.

Integratio simultanea binarum aequationum in theoria praecedente primum obvenit in investigatione functionis H_2, quippe quae duabus aequationibus

$$[H_2, f] = 0, \qquad [H_2, H_1] = 0$$

simul satisfacere debet. E §. antec. hae duae aequationes ope integralium iam inventorum $f = a$, $H_1 = a_1$ in duas alias transformandae sunt. Sed statuamus, aequationum differentialium propositarum praeter duo integralia illa $f = a$, $H_1 = a_1$ haberi tertium:

$$\varphi = \text{Const.},$$

ita ut identice sit

$$[\varphi, f] = 0,$$

transformatio illa non adhibenda, sed haec investigandae ipsius H_2 ineunda via est.

Si habetur $[\varphi, H_1] = 0$, statui potest $H_2 = \varphi$ neque igitur ulteriore disquisitione opus est. Casum quo $[\varphi, H_1]$ in valorem numericum, ex. gr. ± 1 redit, sive generalius in functionem ipsarum f, H, in sequentibus excludemus, quippe quo methodum supra traditam retinere convenit neque tertii integralis inventi usus erit. Quibus suppositis poterit sequente methodo e functione φ alia H_2 derivari, pro qua, sicuti pro ipsa φ, sit $[H_2, f] = 0$, simul vero etiam $[H_2, H_1] = 0$. Ponamus:

$$[\varphi, H_1] = A_1, \qquad [A_1, H_1] = A_2, \qquad [A_2, H_1] = A_3, \qquad \ldots,$$

quae eo usque continuanda est novarum functionum formatio, donec perveniatur ad functionem $[A_{k-1}, H_1] = A_k$, quae antecedentium f, H_1, φ, A_1, A_2, $\ldots$ A_{k-1} functio est

$$A_k = \Psi(f, H_1, \varphi, A_1, A_2, \ldots A_{k-1}),$$

quae functio praeterea e variabilibus q_i, p_i nullam involvat. Sit F functio alia quaecunque earundem quantitatum f, H_1, φ, A_1, A_2, $\ldots$ A_{k-1}, dico *primum*, haberi identice

$$[F, f] = 0.$$

Etenim ex aequatione identica generali (Theor. V, §. 26):

$$[[\psi, f], H_1] + [[f, H_1], \psi] + [[H_1, \psi], f] = 0$$

sequitur casu nostro, quo $[f, H_1] = 0$, aequatio:

$$[[\psi, f], H_1] + [[H_1, \psi], f] = 0.$$

In qua si loco ψ successive ponitur φ, A_1, A_2, A_3, $\ldots$, sequuntur, quum etiam sit ex hypothesi $[\varphi, f] = 0$, alia ex alia aequationes

$$[A_1, f] = 0, \qquad [A_2, f] = 0, \qquad \ldots \qquad [A_{k-1}, f] = 0.$$

Porro fit

$$[F, f] = \frac{\partial F}{\partial f}[f, f] + \frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1, f] + \frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi, f] + \frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1, f] + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1}, f].$$

Unde, quum expressiones in singula differentialia partialia ipsius F multiplicatae identice evanescant, fit $[F, f] = 0$, q. d. e.

Habetur secundo loco:

$$[F, H_1] = \frac{\partial F}{\partial f}[f, H_1] + \frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1, H_1] + \frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi, H_1] + \frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1, H_1] + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1}, H_1],$$

sive quum sit:

$$[f, H_1] = [H_1, H_1] = 0,$$

$$[\varphi, H_1] = A_1, \quad [A_1, H_1] = A_2, \quad \ldots \quad [A_{k-1}, H_1] = A_k = \Psi,$$

habetur

$$[F, H_1] = \frac{\partial F}{\partial \varphi} A_1 + \frac{\partial F}{\partial A_1} A_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-2}} A_{k-1} + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}} \Psi.$$

Unde eruitur functio F, quae duabus aequationibus

$$[F, f] = 0, \quad [F, H_1] = 0$$

simul satisfacit, si ea indagatur ipsarum φ, A_1, A_2, ... A_{k-1} functio F, quae identice efficiat

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} A_1 + \frac{\partial F}{\partial A_1} A_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-2}} A_{k-1} + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}} \Psi = 0,$$

qua in aequatione Ψ est data ipsarum φ, A_1, A_2, ... A_{k-1} functio. Ipsae f, H_1 in hac investigatione tamquam constantes considerari possunt, quippe secundum quas functio quaesita F non differentiatur. Qua de re in Ψ loco f, H_1 etiam earum valores constantes a, a_1 ponere licet.

Per regulas notas habetur F, si F = Constans est integrale aequationum:

$$d\varphi : dA_1 : dA_2 : \ldots : dA_{k-2} : dA_{k-1} =$$
$$A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_{k-1} : \Psi,$$

quod systema locum tenet unius aequationis differentialis ordinis $(k-1)^{ti}$ inter duas variabiles. Quam, si introducitur elementum $d\tau$, etiam per hanc aequationem k^{ti} ordinis repraesentare licet:

$$\frac{d^k \varphi}{d\tau^k} = \Psi,$$

siquidem in expressione ipsius Ψ loco ipsarum A_1, A_2, ... A_{k-1} ponitur

$\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^{k-1}\varphi}{d\tau^{k-1}}$, cuius aequationis si $F = \text{Const.}$ est integrale, invenitur functio quaesita H_2, si in F loco ipsarum $\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^{k-1}\varphi}{d\tau^{k-1}}$ restituuntur valores $A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$. In hac quaestione usui est, quod *quantus sit ordo aequationis differentialis, cuius integrale unum inveniri debet ad determinandam functionem $H_2 = F$, totidem e duobus integralibus $H_1 = a_1$, $\varphi = \text{Const.}$ integralia nova aequationum differentialium propositarum derivare liceat.* Vidimus enim, si $k-1$ iste ordo sit, haberi integralia nova,

$$A_1 = \text{Const.}, \quad A_2 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad A_{k-1} = \text{Const.},$$

quae a se et a tribus integralibus datis independentia sunt. Qua re altioris integrationis incommodum quodammodo compensatur.

Patet antecedentibus, etsi integrale $\varphi = \text{Const.}$ non id sit, quod in serie integralium secundum methodum a me propositam successive investigandorum ut integrale tertium adhiberi possit, eius integralis tamen cognitionem investigationem tertii integralis $H_2 = \text{Const.}$ plurimum adjuvare, siquidem expressio $[H_1, \varphi]$ non in numerum redit alium atque zero, neque in ipsarum f, H_1 functionem.

Praecedentia applicantur ad investigandum usum trium integralium quae conservationem arearum concernunt in aequationibus dynamicis secundum methodum supra propositam integrandis.

64.

Praemissis considerationibus praecedentibus generalibus, revertor ad propositum; quaerimus enim usum, quem in integratione nostra percipere liceat e tribus integralibus, quae principium conservationis arearum concernunt. In applicationibus ad Dynamicam est $f = a$ aequatio, qua principium conservationis virium vivarum continetur. Sint $H_1 = a_1$, $\varphi = \text{Const.}$ aequationes binae e tribus, quae principium arearum constituunt, sive tribus expressionibus

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right), \quad \Sigma m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right)$$

exhibitis per quantitates $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, sit

$$\Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \varphi,$$

$$\Sigma m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) = \psi,$$

$$\Sigma m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right) = H_1.$$

Demonstravi supra §. 51 (2.), haberi

$$[\varphi, \psi] = H_1, \quad [\psi, H_1] = \varphi, \quad [H_1, \varphi] = \psi.$$

Hinc secundum praecepta §. antec. tradita, si statuitur $[\varphi, H_1] = A_1$, $[A_1, H_1] = A_2$, fit $A_1 = -\psi$, $A_2 = -\varphi$, ideoque $k = 2$, $A_k = \Psi = -\varphi$.

Ponendum jam est:

$$d\varphi : dA_1 = A_1 : A_2$$

sive

$$d\varphi : -d\psi = -\psi : -\varphi,$$

sive

$$\varphi d\varphi + \psi d\psi = 0,$$

cuius aequationis habetur integrale:

$$H_2 = \varphi\varphi + \psi\psi = \text{Const.}.$$

Casu igitur proposito aequatio differentialis, cuius integrale inveniri debebat ad determinandam H_2, tantum *primum* ordinem ascendebat, eratque aequationum differentialium propositarum *unum* tantum integrale novum $\psi = \text{Const.}$, quod e dato $\varphi = \text{Const.}$ derivari poterat. Aequatio illa primi ordinis quum sine negotio integrata sit, habemus, si tria integralia principii arearum locum habent, duas functiones H_1, H_2, quae identice satisfaciunt aequationibus:

$$[f, H_1] = 0, \quad [f, H_2] = 0, \quad [H_1, H_2] = 0.$$

Loco H_2 etiam aliam quamlibet functionem ipsarum f, H_1, H_2 ponere licet, ex. gr. functionem

$$H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi},$$

quae plerumque commodiores formulas suppeditat. Invento quolibet integrali $H_i = \text{Const.}$ in serie integralium secundum methodum propositam investigandorum, supra vidimus §. 22 ordinem systematis aequationum differentialium, quae integrandae restant, unitatibus duabus diminui. Hinc introducto uno integrali $H_2 = \text{Const.}$ in locum duorum $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$, nihil nos profecisse videri potest, quum etiam duobus integralibus *quibuscunque* inventis aequationum differentialium propositarum ordo duabus unitatibus diminuatur. Sed hoc interest discrimen, quod introducto uno integrali $H_2 = \text{Const.}$ methodum nostram integrationum adhibere liceat, qua quolibet novo integrali $H_i = \text{Const.}$ invento ordo differentiationum duabus unitatibus diminuitur. Sed melius adhuc methodi propositae indoles his considerationibus perspicitur.

Demonstravi supra §. 56 modo particulari, quod etiam e theoria proposita generali peti poterat, quoties unum integrale

$$H_1 = \Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \Sigma m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt}$$

locum habeat, ope huius integralis unam variabilem v_n una cum eius differentiali $\frac{dv_n}{dt}$ ex aequationibus differentialibus propositis prorsus abire, unde ordo differentiationum duabus unitatibus minuitur. Scilicet posito $v_i = u_i + v_n$ et eliminata $\frac{dv_n}{dt}$ ope aequationis praecedentis, variabilium $v_1, v_2, \ldots v_n$ eorumque differentialium solae differentiae u_i, $\frac{du_i}{dt}$ in aequationibus differentialibus propositis remanent. At ne hoc, quod ea ratione lucramur, commodum rursus perdamus, necesse est, ut ad reductionem ulteriorem ordinis differentiationum ea tantum adhibeamus integralia, quae et ipsa variabilium $v_1, v_2, \ldots v_n$ non nisi differentias continent. Id quod in integralibus duobus reliquis, quae ad principium conservationis arearum pertinent,

$$\varphi = \text{Const.}, \quad \psi = \text{Const.},$$

in quibus

$$\varphi = \Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \Sigma m_i \left\{ \sin v_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) - z_i r_i \cos v_i \frac{dv_i}{dt} \right\},$$

$$\psi = \Sigma m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = \Sigma m_i \left\{ -\cos v_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) - z_i r_i \sin v_i \frac{dv_i}{dt} \right\},$$

locum non habet. Qua de re pro his duobus integralibus certa eorum combinatio adhibenda est, in qua angulorum $v_1, v_2, \ldots v_n$ non nisi differentiae obveniunt. Cuiusmodi combinatio est aequatio

$$\varphi\varphi + \psi\psi = \text{Const.}.$$

Habetur enim, designante e basin logarithmorum naturalium,

$$\psi + \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_i e^{-v_i\sqrt{-1}} \left\{ z_i \frac{dr_i}{dt} - r_i \frac{dz_i}{dt} - \sqrt{-1} \cdot z_i r_i \frac{dv_i}{dt} \right\},$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_k e^{+v_k\sqrt{-1}} \left\{ z_k \frac{dr_k}{dt} - r_k \frac{dz_k}{dt} + \sqrt{-1} \cdot z_k r_k \frac{dv_k}{dt} \right\},$$

sive posito

$$z_i = \varrho_i \cos\eta_i, \qquad r_i = \varrho_i \sin\eta_i,$$

habetur:

$$\psi + \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_i e^{-v_i\sqrt{-1}} \varrho_i^2 \left\{ \frac{d\eta_i}{dt} - \sqrt{-1} \cdot \cos\eta_i \sin\eta_i \frac{dv_i}{dt} \right\},$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1} = \Sigma m_k e^{+v_k\sqrt{-1}} \varrho_k^2 \left\{ \frac{d\eta_k}{dt} + \sqrt{-1} \cdot \cos\eta_k \sin\eta_k \frac{dv_k}{dt} \right\};$$

unde

$$\psi\psi+\varphi\varphi =$$

$$\Sigma m_i m_k e^{-(v_i-v_k)\sqrt{-1}}\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\frac{d\eta_i}{dt}-\sqrt{-1}\,.\cos\eta_i\sin\eta_i\frac{dv_i}{dt}\right\}\left\{\frac{d\eta_k}{dt}+\sqrt{-1}\,.\cos\eta_k\sin\eta_k\frac{dv_k}{dt}\right\},$$

ipsis i et k in summa duplici praecedente tributis valoribus $1, 2, \ldots n$, siquidem rursus n est numerus punctorum materialium, quorum motus determinandus proponitur. Quam summam patet ipsarum $v_1, v_2, \ldots v_n$ solas differentias continere. Quae ut etiam ipsarum $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \ldots \frac{dv_n}{dt}$ solas differentias contineat, facile efficitur adiumento aequationis

$$H_1 = \Sigma m_i r_i^2\frac{dv_i}{dt} = \Sigma m_i\varrho_i^2\sin^2\eta_i\frac{dv_i}{dt} = \text{Const.}.$$

Imaginariis eiectis, aequatio praecedens in hanc abit:

$$\psi\psi+\varphi\varphi =$$

$$\Sigma m_i m_k\cos(v_i-v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\frac{d\eta_i}{dt}\frac{d\eta_k}{dt}+\tfrac{1}{4}\sin 2\eta_i\sin 2\eta_k\frac{dv_i}{dt}\frac{dv_k}{dt}\right\}$$

$$+\Sigma m_i m_k\sin(v_i-v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left\{\tfrac{1}{2}\sin 2\eta_k\frac{d\eta_i}{dt}\frac{dv_k}{dt}-\tfrac{1}{2}\sin 2\eta_i\frac{d\eta_k}{dt}\frac{dv_i}{dt}\right\},$$

quam data occasione adnotare placet formulam.

Quum antecedentibus casu proposito pateat, in ipsa integratione aequationum differentialium propositarum in locum duorum integralium $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ adhibendam esse unicum $\varphi\varphi+\psi\psi = \text{Const.}$, quaeritur, quinam usus sit integralis $\varphi = \text{Const.}$ sive $\psi = \text{Const.}$, quod praeter integrale hoc $\varphi\varphi+\psi\psi = \text{Const.}$ habetur. Cuius is est usus, quod eius integralis beneficio *quadraturae* supersedeatur. Sint enim $H_1 = a_1$, $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$, tria integralia, quae principium conservationis arearum constituunt, designantibus a_1, a_2, β constantes arbitrarias. Inventis omnibus aequationibus integralibus inter quantitates r_i, u_i, z_i, $\frac{dr_i}{dt}$, $\frac{du_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$, invenitur $\frac{dv_n}{dt}$ ope aequationis

$$H_1 = \Sigma m_i r_i^2\frac{dv_i}{dt} = \alpha$$

per formulam supra traditam §. 56 (1.):

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\alpha-\Sigma m_i r_i^2\frac{du_i}{dt}}{\Sigma m_i r_i^2}.$$

E qua formula per quadraturam valor ipsius v_n eruendus foret, cui tamen per aequationem $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$ sive $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$ sive aliam ex iis conflatam super-

sedetur. Fit enim, advocatis ipsorum φ, ψ expressionibus supra traditis:

$$\varphi\cos v_n+\psi\sin v_n=\sqrt{a_2}\cos(v_n-\beta)=\Sigma m_i\left\{\sin u_i\left(r_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dr_i}{dt}\right)-z_i r_i\cos u_i\frac{dv_i}{dt}\right\},$$

$$\varphi\sin v_n-\psi\cos v_n=\sqrt{a_2}\sin(v_n-\beta)=\Sigma m_i\left\{\cos u_i\left(r_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dr_i}{dt}\right)+z_i r_i\sin u_i\frac{dv_i}{dt}\right\}.$$

Quarum aequationum alterutra post substitutionem valorum $\frac{dv_i}{dt}=\frac{du_i}{dt}+\frac{dv_n}{dt}$, qui iam pro datis habentur, determinatur v_n sine quadratura.

Demonstratur, quodvis problema mechanicum, quo principia conservationis virium vivarum et arearum valeant, atque in quo positio systematis a tribus tantum quantitatibus pendeat, ad quadraturas revocari.

65.

Considerationibus praecedentibus aestimari potest, quae methodo proposita lucramur, si in problemate mechanico praeter principium conservationis virium vivarum tria integralia locum habent, quae principium conservationis arearum concernunt. Systematis aequationum differentialium propositi

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \ldots : \quad dp_m =$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

est ordo $2m-1$, qui per integrale $f=a$ revocatur ad ordinem $2m-2$, ac per tria integralia principii arearum $H_1=a_1$, $\varphi=\sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi=\sqrt{a_2}\sin\beta$, ad ordinem $2m-5$. Nam licet iam per duo integralia $f=a$, $H_1=a_1$ aequationes propositae ad ordinem $2m-4$ revocentur, ponendo $v_i=v_n+u_i$ et eliminando differentiale $\frac{dv_n}{dt}$, ipsa v_n ex aequationibus differentialibus sponte abeunte, adnotavi tamen, ne ipsa V_n in aequationes differentiales redeat, loco integralium $\varphi=\sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi=\sqrt{a_2}\sin\beta$ unicum tantum $\varphi\varphi+\psi\psi=a_2$ adhiberi posse, ideoque tantum unitate ordo $2m-4$ adhuc diminuetur. At methodo nostra, qua integrale quodlibet datis considerationibus satisfaciens ordinem differentiationum unitatibus duabus diminuit, fit ut duobus integralibus $H_1=a_1$, $H_2=a_2$ adhibitis, quippe pro quibus identice habetur

$$[H_1, f]=0, \quad [H_2, f]=0, \quad [H_1, H_2]=0,$$

ordo $2m-2$ *revocetur ad ordinem* $2m-6$. Fluit igitur casu speciali, quo $m=3$, e methodo tradita propositio memorabilis:

Quodlibet problema mechanicum, pro quo principia conservationis virium vivarum et arearum locum habent, et in quo positio geometrica systematis tribus quantitatibus determinatur, ad quadraturas revocari potest.

Propositio praecedens paullum a gravitate sua eo amittit, quod, ni vehementer fallor, nullum extat problema mechanicum, pro quo dicta principia generalia locum habeant, et in quo positio systematis a tribus quantitatibus pendeat, praeter duo illa motus puncti versus centrum fixum attracti et rotationis corporis solidi nullis viribus sollicitati circa punctum eius fixum. Horum autem problematum solutio completa iam ex longo temporis intervallo inter Analystas constat. At posterioris certe problematis reductio ad quadraturas extolli solet ut pulcherrimus gloriae titulus, quem adepti sint Analystae decimi octavi saeculi, qui tamen aequationum differentialium integrationem perbene calluerunt. Et postea magnas laudes iustamque admirationem meruit ill. *Lagrange,* qui istam ad quadraturas problematis reductionem vel sine advocatis axium principalium corporum proprietatibus, quibus *Euleri* analysis nitebatur, suscipere ausus fuerit; id quod pro splendida ac paene luxuriante artis manifestatione habeatur. Qua de re fortasse non displicebit Analystis, quod hic non tantum sine auxilio proprietatum axium principalium, sed adeo sine certa variabilium electione — quid? quod sine formatione aequationum differentialium problemati illi particularium, reductio ad quadraturas efficiatur, nulla re in subsidium vocata, nisi quod in problemate assignato principia generalia mechanica valeant.

Operae pretium videtur, *simultaneam* duorum problematum mechanicorum, de quibus dixi, reductionem ad quadraturas, secundum methodum traditam generalem efficiendam, accuratius exponere. Si motus propositi perturbantur, eadem analysis sine ulteriore calculo differentialia elementorum perturbatorum suppeditat (§. 52).

Solutio simultanea problematis de motu puncti versus centrum fixum attracti atque problematis de rotatione corporis solidi nullis viribus sollicitati circa punctum fixum, una cum expressionibus differentialibus elementorum perturbatorum utriusque problematis.

66.

Eligatur modus quicunque, in altero problemate positionem puncti in spatio, in altero positionem corporis solidi circa punctum eius fixum determinandi, quod fit in utroque per quantitates tres, quas voco q_1, q_2, q_3. Sit $\frac{dq_1}{dt} = q_1'$, $\frac{dq_2}{dt} = q_2'$, $\frac{dq_3}{dt} = q_3'$, ac expressa semisumma virium vivarum T per q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', sit

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3.$$

Ponamus, $H = a$ esse aequationem principium conservationis virium vivarum

constituentem, atque $H_1 = a_1$, $\varphi = a_1'$, $\psi = a_1''$ esse tres aequationes, quae principium conservationis arearum repraesentant respectu trium planorum inter se orthogonalium, in altero problemate per centrum attractionis, in altero per punctum fixum corporis ductorum.

Quantitates a, a_1, a_1', a_1'', sunt constantes arbitrariae, quae ipsas functiones H, H_1, φ, ψ non afficiunt. Expressis H, H_1, $H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi}$ per quantitates q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, atque ex aequationibus

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2,$$

in quibus $a_2 = \sqrt{a_1 a_1 + a_1' a_1' + a_1'' a_1''}$ determinatis quantitatibus p_1, p_2, p_3 per q_1, q_2, q_3, est $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$ differentiale completum, positoque

$$\int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3\} = V,$$

ac designantibus a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 constantes arbitrarias, evadunt e §§. 33., 34. aequationes:

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a} dq_3 \right\} = t + b,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_1} dq_3 \right\} = b_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_2} dq_3 \right\} = b_2$$

integralia completa utriusque problematis propositi, eruntque tres aequationes postremae aequationes finitae problematum.

Si motus propositi perturbantur atque in problematibus perturbatis aequatio concernens principium conservationis virium vivarum fit

$$H + \Omega = \text{Const.},$$

sunt e §. 52. differentialia elementorum perturbatorum data per formulas:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_2},$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_2}.$$

Iam olim ill. *Poisson* in Commentatione praeclara Actis Academiae Parisiensis anni 1816 inserta expressiones differentiales elementorum perturbatorum pro utroque problemate communi analysi investigari posse demonstravit. Sed ipsa problemata duo imperturbata eadem analysi hic primum, quantum credo, amplexus sum.

Iam certa variabilium electione facta formulas inventas pro altero problemate seorsim evolvam.

De motu puncti versus centrum fixum attracti secundum legem Neutonianam; formulae differentiales elementorum perturbatorum.

67.

Sint $\varrho\cos\eta$, $\varrho\sin\eta\cos v$, $\varrho\sin\eta\sin v$ coordinatae orthogonales puncti attracti, spectato centro fixo ut initio coordinatarum; posito $\frac{d\varrho}{dt}=\varrho'$, $\frac{dv}{dt}=v'$, $\frac{d\eta}{dt}=\eta'$, massaque corporis $=1$, fit, designante $\varkappa^2$ vim attractivam pro unitate distantiae:

$$(1.)\quad \begin{cases} H = \frac{1}{2}\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\varrho^2\sin^2\eta.v'v'\}-\frac{\varkappa^2}{\varrho}=a, \\ H_1=\varrho^2\sin^2\eta.v'=a_1, \\ H_2=\{H_1H_1+\varphi\varphi+\psi\psi\}^{\frac{1}{2}}=\varrho^2\{\eta'\eta'+\sin^2\eta.v'v'\}^{\frac{1}{2}}=a_2. \end{cases}$$

Quae notae sunt formulae et facillime probantur. Quantitates ϱ, η, v hic sunt eaedem, quas §. antec. per q_1, q_2, q_3 denotavi. Fit porro

$$T = \tfrac{1}{2}\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\varrho^2\sin^2\eta.v'v'\},$$

unde

$$\frac{\partial T}{\partial\varrho'}=\varrho', \qquad \frac{\partial T}{\partial\eta'}=\eta_1=\varrho^2\eta', \qquad \frac{\partial T}{\partial v'}=v_1=\varrho^2\sin^2\eta.v'.$$

Quantitates ϱ', η_1, v_1 hic eaedem sunt atque §. antec. per p_1, p_2, p_3 denotatae.

Eliminata v', fit e (1.):

$$a+\frac{\varkappa^2}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\left\{\varrho'\varrho'+\varrho^2\eta'\eta'+\frac{a_1a_1}{\varrho^2\sin^2\eta}\right\},$$

$$a_2^2 = \varrho^4\eta'\eta'+\frac{a_1a_1}{\sin^2\eta},$$

unde

$$(2.)\quad \begin{cases} \varrho' = \left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_1 = \varrho^2\eta' = \left\{a_2^2-\frac{a_1a_1}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ v_1 = \varrho^2\sin^2\eta.v' = a_1. \end{cases}$$

His substitutis valoribus fit

$$(3.)\quad \begin{cases} V = \int\left\{\varrho'd\varrho+\eta_1d\eta+v_1dv\right\} \\ \quad = \int\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}d\varrho+\int\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta+a_1v. \end{cases}$$

Hic non tantum patet, quod generaliter probavimus, expressionem

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots$$

differentiale exactum esse, sed ea, qua usi sumus, variabilium electione id effectum esse videmus, ut in expressione illa differentiali adeo variabiles separatae sint. Idem evenit pro lege attractionis quacunque, quae si exprimitur per functionem $-\frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho}$, tantum opus est, ut in expressione ipsius V antecedente loco ipsius $\frac{\varkappa^2}{\varrho}$ ponatur $f(\varrho)$.

Ex aequatione (3.) fluunt secundum praecepta §. antec. tradita integralia finita problematis:

$$(4.)\quad t+b = \frac{\partial V}{\partial a} = \int \frac{d\varrho}{\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$(5.)\quad b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1} = -\int \frac{a_1 d\eta}{\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}\sin^2\eta} + v,$$

$$(6.)\quad b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2} = a_2\int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} - a_2\int \frac{1}{\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

Fit primum

$$(7.)\quad \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\sin\eta\, d\eta}{\{a_2^2-a_1^2-a_2^2\cos^2\eta\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a_2}\operatorname{Arc}\cos\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2-a_1^2}}\cdot\cos\eta\right),$$

porro e (5.) habetur:

$$(8.)\quad v-b_1 = -\int \frac{a_1 d\operatorname{ctg}\eta}{\{a_2^2-a_1^2-a_1^2\operatorname{ctg}^2\eta\}^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{Arc}\cos\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2-a_1^2}}\cdot\operatorname{ctg}\eta\right),$$

unde

$$(9.)\quad \operatorname{ctg}\eta = \sqrt{\frac{a_2^2-a_1^2}{a_1^2}}\cdot\cos(v-b_1).$$

Deinde erit:

$$(10.)\quad \int \frac{a_2}{\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho^2} = \int \frac{a_2^2}{\left\{\varkappa^4+2aa_2^2-\left(\varkappa^2-\frac{a_2^2}{\varrho}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho^2} = u,$$

siquidem satuitur

$$(11.)\quad \frac{a_2^2}{\varrho}-\varkappa^2 = \sqrt{\varkappa^4+2aa_2^2}\,.\cos u.$$

Substitutis (7.) et (10.), aequatio (6.) in hanc abit:

$$(12.)\quad b_2 = \operatorname{Arc}\cos\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2-a_1^2}}\cdot\cos\eta\right)-u,$$

unde

$$(13.) \qquad \cos\eta = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2}} \cdot \cos(u + b_2).$$

Denique habetur e (4.):

$$t + b = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{2a\varrho^2 + 2\varkappa^2\varrho - a_2^2}} = \int \frac{\sqrt{-2a}.\varrho\, d\varrho}{\{\varkappa^4 + 2aa_2^2 - (2a\varrho + \varkappa^2)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

sive posito

$$(14.) \qquad \varkappa^2 + 2a\varrho = \sqrt{\varkappa^4 + 2aa_2^2}.\cos E,$$

fit

$$(15.) \qquad t + b = \frac{1}{\sqrt{-2a}} \int \varrho\, dE = \frac{\varkappa^2 E}{(-2a)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{\varkappa^4 + 2aa_2^2}}{(-2a)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin E.$$

Ut aequationes inventae induant formam simpliciorem, pro constantibus arbitrariis adhibitis alias introducam. Sit

$$(16.) \qquad \sqrt{1 + \frac{2aa_2^2}{\varkappa^4}} = e, \quad a = -\frac{\varkappa^2}{2A}, \quad \mu = \frac{(-2a)^{\frac{3}{2}}}{\varkappa^2} = \frac{\varkappa}{A^{\frac{3}{2}}},$$

fiunt (14.), (11.), (15.):

$$(17.) \quad \varrho = A(1 - e.\cos E), \quad \frac{A(1-ee)}{\varrho} = 1 + e.\cos u, \quad \mu(t+b) = E - e.\sin E.$$

E quibus aequationibus patet, quantitates E, u, $\mu(t+b)$, A, e, $-b$, $\frac{a_2}{\varkappa}$ esse *anomaliam excentricam*, *anomaliam veram*, *anomaliam mediam*, *semiaxem maiorem*, *excentricitatem*, *tempus perihelii*, *radicem quadraticam semiparametri*.

Ponamus porro:

$$(18.) \qquad \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2}} = \operatorname{tg} i, \quad \text{unde} \quad \frac{a_1}{a_2} = \cos i,$$

fit e (9.)

$$(19.) \qquad \cos i \cos\eta = \sin i \sin\eta \cos(v - b_1),$$

quae docet aequatio orbitam puncti attracti esse planam atque designare i *inclinationem orbitae* atque b_1 *longitudinem nodi ascendentis orbitae* ideoque erit $\frac{a_1}{\varkappa}$ aequale *radici quadraticae semiparametri multiplicatae per cosinum inclinationis orbitae*. Unde iam quinque constantes arbitrariae a, a_1, a_2, b, b_1 significationem geometricam invenerunt. Restat aequatio (13.) quae e (18.) in hanc abit:

$$(20.) \qquad \cos\eta = \sin i \cos(u + b_2) = \sin i.\sin\left(u + \frac{\pi}{2} + b_2\right).$$

Haec formula docet, esse $\frac{\pi}{2} + b_2$ *distantiam perihelii a nodo ascendente*.

E theoremate §. 66 proposito fiunt differentialia elementorum perturbatorum:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2},$$

quibus in formulis est

$\frac{-\varkappa^2}{2a}$ ··· semiaxis major,

$\frac{a_1}{\varkappa}$ ··· radix quadratica semiparametri multiplicata per cosinum inclinationis,

$\frac{a_2}{\varkappa}$ ··· radix quadratica semiparametri,

$-b$ ··· tempus perihelii,

b_1 ··· longitudo nodi ascendentis,

$\frac{\pi}{2} + b_2$ ··· distantia perihelii a nodo ascendente.

Designante igitur, ut notationem usitatiorem adhibeam, A semiaxem maiorem, h radicem quadraticam semiparametri, i inclinationem, τ tempus perihelii, Ω longitudinem nodi ascendentis, ϖ distantiam eius a perihelio, fiunt formulae differentiales elementorum perturbatorum:

$$(21.) \quad \begin{cases} \varkappa^2 \frac{dA}{dt} = 2A^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, & \varkappa^2 \frac{d\tau}{dt} = -2A^2 \frac{\partial\Omega}{\partial A}, \\ \varkappa \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h}, & \varkappa \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}, \\ \varkappa \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial . h\cos i}, & \varkappa \frac{d.h\cos i}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}. \end{cases}$$

quae formulae aequivalent aequationibus differentialibus sequentibus, in quibus $\varrho = \sqrt{xx+yy+zz}$:

$$(22.) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 x}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 y}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 z}{\varrho^3} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

in quibus Ω data est functio ipsarum x, y, z, t, vel adeo aequationibus differentialibus generalioribus sequentibus:

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' + \dfrac{\partial\Omega}{\partial x'}, & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 x}{\varrho^3} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y' + \dfrac{\partial\Omega}{\partial y'}, & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 y}{\varrho^3} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{dz}{dt} = z' + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z'}, & \dfrac{dz'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 z}{\varrho^3} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

in quibus Ω est data functio ipsarum t, x, y, z, x', y', z'. Per varias methodos supra traditas ex elementorum canonicorum systemate proposito innumera alia facillime derivantur.

Si placet, quod in calculis commodius est, in locum temporis perihelii ut elementum introducere *epocham* seu *valorem anomaliae mediae pro* $t = 0$,

$$c = -\mu\tau = \mu b,$$

facile deducitur e (21.):

$$\varkappa\frac{dc}{dt} = 2A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Omega}{\partial A}, \qquad \varkappa\frac{dA}{dt} = -2A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\Omega}{\partial c},$$

reliquis formulis (21.) immutatis manentibus.

Quaeramus adhuc ipsius functionis V expressionem finitam. Fit

$$\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\varkappa e}{\sqrt{A}}\,\frac{\sin E}{1-e\cos E},$$

$$d\varrho = Ae\sin E\,dE,$$

unde

$$\int\left\{2\left(a+\frac{\varkappa^2}{\varrho}\right)-\frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}d\varrho = \varkappa e^2\sqrt{A}\int\frac{\sin^2 E\,dE}{1-e\cos E}$$

$$= \varkappa\sqrt{A}\left\{E+e\sin E-2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}\right)\right\}.$$

Fit porro, posito $a_2 = \varkappa h = \varkappa\sqrt{A(1-e^2)}$,

$$\int\left\{a_2^2-\frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta = \varkappa h\int\left\{1-\frac{\cos^2 i}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}d\eta$$

$$= \varkappa h\,\mathrm{Arc\,cos}\left(\frac{\cos\eta}{\sin i}\right)-\varkappa h\cos i\,\mathrm{Arc\,cos}\,(\mathrm{ctg}\,i\,\mathrm{ctg}\,\eta).$$

Unde

$$V = \varkappa\sqrt{A}\left\{E+e\sin E-2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}\right)\right\}+\varkappa h\,\mathrm{Arc\,cos}\left(\frac{\cos\eta}{\sin i}\right)$$

$$+\varkappa h\cos i\left\{v-\mathrm{Arc\,cos}\,(\mathrm{ctg}\,i\,\mathrm{ctg}\,\eta)\right\}.$$

In differentianda hac expressione secundum constantes arbitrarias A, e, i, quae in locum ipsarum a, a_1, a_2 introduci possunt, adhibendae sunt aequationes:

$$0 = 1-e\cos E+Ae\sin E\,\frac{\partial E}{\partial A},$$

$$0 = \cos E-e\sin E\,\frac{\partial E}{\partial e},$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial i}.$$

Integrationes antecedentibus factae sunt respective inde a limitibus $\varrho = A(1-e)$, $\eta = \frac{\pi}{2} - i$. Quorum limitum in differentianda V secundum constantes arbitrarias respectum non habuimus. Scilicet quia in expressione V termini sub signo integrationis pro limitibus illis evanescunt, unde facile patet, terminos e limitum variatione prodeuntes evanescere ideoque negligi posse.

De methodo proposita in varia problemata applicanda, ac praesertim in problemata isoperimetrica.

68.

Methodus generalis etiam facillime applicatur problemati celeberrimo de puncto versus duo puncta fixa, quorum datae sunt massae, secundum legem Neutonianam attracto. In cuius solutione occupatus invenerat *Eulerus* praeter integralia duo a principiis conservationis virium vivarum et arearum suppeditata integrale tertium, quo problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles revocabatur. At summo viri egregii acumine et intrepido animo indigebat, ut per varia tentamina aequationis differentialis complicatissimae reductio ad quadraturas succederet. Nostra methodo per regulam generalem absque omni calculo instituendo aequatio differentialis revocari potuisset ad quadraturas. Determinatis enim e tribus illis integralibus x', y', z' per x, y, z et tres constantes arbitrarias a, a_1, a_2, quas principia conservationis virium vivarum et arearum et integrale ab *Eulero* inventum involvunt, erunt aequationes tres:

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a} dx + \frac{\partial y'}{\partial a} dy + \frac{\partial z'}{\partial a} dz \right\} = t + b,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a_1} dx + \frac{\partial y'}{\partial a_1} dy + \frac{\partial z'}{\partial a_1} dz \right\} = b_1,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial x'}{\partial a_2} dx + \frac{\partial y'}{\partial a_2} dy + \frac{\partial z'}{\partial a_2} dz \right\} = b_2,$$

in quibus expressiones sub signis integrationum differentialia exacta sunt, problematis propositi aequationes finitae. Nec non etiam huius problematis sine ullo calculo per propositiones nostras generales habentur formulae perturbatoriae.

Quoties in problemate mechanico, in quo principium conservationis virium vivarum valet, positio systematis duabus quantitatibus a se independentibus q_1, q_2 determinatur — quod ex. gr. evenit, puncto supra datam superficiem *in linea brevissima* moto — nova methodo integrandi aequationes

differentiales partiales primi ordinis non egebat, sed sufficit *Lagrangiana*, quae de tribus variabilibus pro perfecta haberi potest. Problemata eiusmodi pendent ab integratione aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles, quae, si praeter dictum principium alterum innotescit integrale

$$f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = a_1,$$

revocatur ad ordinem primum. Sed secundum methodum nostram generalem vel etiam secundum ipsam methodum *Lagrangianam* integrandi aequationes differentiales partiales primi ordinis inter tres variabiles, *haec aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles semper ad quadraturas revocari potest.* Sit enim $f = a$ aequatio pro viribus vivis, eruantur ipsarum p_1, p_2 valores ex aequationibus $f = a$, $f_1 = a_1$, determinabit aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 \right\} = b_1$$

positionem systematis, sive pro puncto singulo, in data superficie moto, eius *orbitam*, atque altera aequatio

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 \right\} = b + t$$

positionis tempus. In hunc casum, qui tantum integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis inter variabiles *tres* requirit, in qua una variabilium, functio quaesita, ipsa non obvenit, exempla praecedentibus allegata redeunt. Nam introducendo coordinatas polares per integrale a principio conservationis arearum petitum unam variabilem simul atque differentiale partiale secundum eam sumtum ex aequatione differentiali partiali eliminare licet, unde tres variabiles independentes ad duas revocantur atque aequatio differentialis partialis, a cuius integratione problema pendet, ad aliam iam apud ill. *Lagrange* tractatam.

Notum est, aequationes differentiales vulgares *lineares* secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas esse, ut post alterum integrale inventum alterum tantum a quadraturis pendeat. Problemata mechanica videmus ducere ad alias aequationes differentiales vulgares secundi ordinis inter duas variabiles ita comparatas, ut post alterum integrale inventum alterum a solis quadraturis pendeat, et quae neutiquam sunt lineares.

Cuiusmodi ex. gr. est aequatio differentialis notissima, quae lineam brevissimam in data superficie concernit, quippe quam describit punctum in superficie data moveri coactum et a viribus nullis acceleratricibus solicitatum; unde habetur propositio:

aequationis differentialis secundi ordinis, a qua linea brevissima pendet, si integrale unum inventum est, lineae determinatio ad solas quadraturas revocatur.

Cuius propositionis exempla suggerunt lineae brevissimae in superficiebus rotundis, conicis, cylindricis, in quibus integrale unum sponte se offert. Ac generalius, quod diximus, valebit de aequationibus differentialibus secundi ordinis, a quibus pendent problemata, integralia huiusmodi

$$\int q\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

maxima vel *minima* reddere. Facile autem patet e supra traditis, exhibendo problemata mechanica hic tractata sub forma

$$\delta \int (T+U)\, dt = 0,$$

methodum propositam omnibus problematibus isoperimetricis adhiberi posse, in quibus expressio sub signo integrationis quemlibet functionum incognitarum numerum earumque differentialia prima involvat. Posito enim $q_i = \frac{dq_i}{dt}$, si proponitur aequatio:

$$\delta \int \varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m')\, dt = 0,$$

ponatur

$$H = q_1' \frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi,$$

atque eliminentur ex hac expressione ipsae q_1', q_2', $\ldots$ q_n' per aequationes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} = p_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} = p_2, \qquad \ldots \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} = p_m.$$

Quo facto pendebit problema, quod facile e regulis notis calculi variationum comprobatur, atque ex ipsa analysi elucet, quam apud ill. *Hamilton* invenis, ab integratione completa systematis aequationum differentialium vulgarium sequentium:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Quam integrationem completam demonstravi obtineri per integrationem completam aequationis differentialis partialis

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

in qua ponendum est

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial V}{\partial q_m}.$$

Haec autem integratio per methodum novam hic propositam absolvitur.

Etiam generaliorem casum problematum isoperimetricorum, quo expressio sub signo integrationis praeter differentialia prima functionum incognitarum differentialia altiora ordinis cuiuslibet involvit, contingit ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocare. Quae aequationes differentiales partiales omnes eo commodo gaudent, quod functionem quaesitam sive variabilem dependentem ipsam non involvunt. Sunt tamen problemata isoperimetrica, quae ad aequationes differentiales partiales conducant ipsam etiam variabilem dependentem involventes, ea dico, in quibus expressio, cuius variationem evanescentem reddi oportet, non immediate ut integrale proponitur, sed et ipsa ab integratione aequationis differentialis primi ordinis pendet, quae praeterea functiones incognitas earumque differentialia involvit. Quin adeo, si expressio, cuius variationem evanescentem reddere proponitur, per aequationem differentialem cuiuslibet ordinis datur, quae etiam functiones incognitas earumque differentialia involvat, quaestionem ad integrationem aequationis differentialis partialis primi ordinis revocare contigit. Unde et illis quaestionibus valde generalibus methodos nostras applicare licet.

Quaestiones isoperimetricas, quae ad aequationes differentiales partiales primi ordinis revocari possunt, antecedentibus eas esse supposuimus, in quibus *functiones unius variabilis* seu *curvae* indagantur proprietati maximi minimive satisfacientes. Quaenam analoga extent circa problemata isoperimetrica, in quibus functiones duarum variabilium seu superficies quaeruntur, integrale duplex propositum maximum minimumve reddentes, felicioribus conatibus relinquo investiganda.

De relationibus simplicissimis, quibus differentialia partialia variabilium secundum elementa canonica sumta differentialibus elementorum secundum variabiles sumtis vel nude vel mutato signo singula singulis aequiparantur.

69.

Systema elementorum, quae afficiunt solutiones problematum mechanicorum secundum methodum a me propositam inventas, praeterea quod formulas perturbatorias simplicissimas suppeditant, aliis adhuc gravissimis proprietatibus gaudent. Quas sequentibus exponam.

Sit V functio quantitatum

$$q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_m,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_\mu$$

ac ponamus

$$(1.)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1}=p_1,\quad \frac{\partial V}{\partial q_2}=p_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial V}{\partial q_m}=p_m,$$

$$(2.)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1,\quad \frac{\partial V}{\partial a_2}=b_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial V}{\partial a_m}=b_m,$$

$$(3.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t_1}=T_1,\quad \frac{\partial V}{\partial t_2}=T_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial V}{\partial t_\mu}=T_\mu.$$

Ex aequationibus (1.) et (2.) sint $q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_m$ expressae per $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m,\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_\mu$ ac vice versa $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m$ expressae per $q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_m,\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_\mu$. Quae sunt expressiones, quas in sequentibus subintelligam, si quantitates $q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_m$ secundum $a_i,\ b_i,\ t_i$ vel vice versa quantitates $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m$ secundum $q_i,\ p_i,\ t_i$ differentiantur. Suppositionem, quantitates $q_i,\ p_i$ per $a_i,\ b_i,\ t_i$ ita expressas esse, ut (1.), (2.) identicae evadant, vocabo *suppositionem primam;* suppositionem, quantitates $a_i,\ b_i$ per $q_i,\ p_i,\ t_i$ ita expressas esse, ut (1.), (2.) identicae evadant, vocabo *suppositionem secundam.*

Suppositione *prima* facta, differentiemus aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial a_k}=b_k$$

secundum $a_i,\ b_i,\ t_i$, prodit:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial a_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_i}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial a_i}=0,$$

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial b_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial b_i}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial b_i}=\frac{\partial b_k}{\partial b_i},$$

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial t_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t_i}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial a_k\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t_i}=0.$$

Suppositione *secunda* facta differentiemus aequationes

$$\frac{\partial V}{\partial q_\lambda}=p_\lambda$$

secundum $q_{i'},\ p_{i'},\ t_{i'}$, prodit:

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial q_{i'}}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}}=0,$$

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}}=\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}},$$

$$(9.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial t_{i'}}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}}=0.$$

In his formulis indicibus i, i', k, λ tribui possunt valores $1, 2, \ldots m$, excepto casu, quo i, i' ipsam t afficiunt, quo casu iis valores $1, 2, \ldots \mu$ conveniunt. Expressiones $\frac{\partial b_k}{\partial b_i}$, $\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}}$ sunt aut $= 0$, si k, λ ab i, i' diversi sunt, aut $= 1$, si $k = i$, $\lambda = i'$.

Multiplicentur aequationes (4.), (5.), (6.) per

$$\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial t_{i'}},$$

ac post multiplicationes factas instituatur summatio secundum indicem k, hoc est, ponatur successive $1, 2, \ldots m$ loco ipsius k et expressiones, quae inde prodeunt, addantur. Quo facto per (7.), (8.), (9.) nanciscimur e (4.):

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial a_i}, \end{array}\right.$$

$$(11.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial a_i}; \end{array}\right.$$

e (5.):

$$(13.)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i},$$

$$(14.)\quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15.)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i};$$

e (6.):

$$(16.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial t_i}, \end{array}\right.$$

$$(17.)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial t_i}. \end{array}\right.$$

Si utrique parti aequationum (10.), (12.), (16.), (18.) respective additur:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial t_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial t_i}$$

aequationes inventae (10.) — (18.) sic exhiberi possunt:

$$(10.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(11.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12.^*) \quad \frac{\partial b_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(13.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(14.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15.^*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = -\frac{\partial T_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(16.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(17.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18.^*) \quad \frac{\partial T_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial t_i}.$$

Ut aequationes novem praecedentes, quae sunt gravia et elegantia theoremata, recte intelligantur, teneri oportet, expressiones ad laevam omnes referri ad suppositionem secundam, qua considerantur $2m$ quantitates a_i et b_i ut functiones ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$ aequationibus (1.) et (2.) identice satisfacientes atque illi ipsarum a_i et b_i valores in expressionibus T_i substituti supponuntur, antequam secundum $t_{i'}$ differentiantur; contra expressiones ad dextram omnes ad suppositionem primam pertinent, qua considerantur $2m$ quantitates q_i et p_i ut functiones ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m, t_1, t_2, \ldots t_\mu$ aequationibus (1.) et (2.) identice satisfacientes, atque illi ipsarum q_i et p_i valores in expressionibus $T_{i'}$ substituti supponuntur, antequam secundum t_i differentiantur.

70.

Aequationes integrales systematis aequationum differentialium vulgarium propositi sub duabus maxime formis considerantur; exprimuntur enim aut incognitae omnes per unam ex earum numero (ex. gr. tempus in quaestionibus mechanicis) atque constantes arbitrarias, quas integratio completa secum fert, aut exprimuntur constantes arbitrariae per incognitas. Qua in re incognitas etiam dicimus earum differentialia, quae inferioris ordinis sunt atque summi, ad quem in aequationibus differentialibus propositis ascendunt. Aequationes posterioris formae ita comparatae sunt, ut semel differentiando constantes omnes arbitrariae sponte abeant, ideoque aequationibus differentialibus, quae inde proveniunt, per ipsas aequationes differentiales propositas sponte satisfiat, cuiusmodi aequationes integrales prae ceteris vocavi integralia aequationum differentialium propositarum. Aequationes integrales, quae motum ellipticum concernunt puncti secundum legem Neutonianam ad punctum fixum attracti, saepius sub utraque forma propositae sunt, variosque ad usus indagatae sunt quotientes differentiales partiales provenientes, si in altera forma incognitae secundum singulas constantes arbitrarias, sive in altera functiones constantibus arbitrariis aequivalentes secundum singulas incognitas differentiantur. Qua de re memoratu dignum mihi videtur, quod e formulis praecedentibus patet, proposito systemate aequationum differentialium vulgarium, quale in mechanicis integrandum est:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m},$$

si eligatur constantium arbitrarium sive elementorum systema canonicum, fore ut quotientes differentiales incognitarum secundum elementa aut elementorum secundum incognitas singulae singulis aequales evadant aut solo signo inter se differant.

Sit enim in formulis praecedentibus $\mu = 1$, sive una tantum adsit quantitatum $t_1, t_2, \ldots t_\mu$, quam vocabo t. Ponendo in expressione

$$\frac{\partial V}{\partial t} = T$$

loco $a_1, a_2, \ldots a_m$ earum valores per $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t$ expressos, quales obtinetur ex m aequationibus

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

abeat T in $-H$, ideo ut sit $-H$ expressio ipsius T in suppositione secunda. Unde erit V integrale aequationis differentialis partialis

$$(1.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

quod integrale continebit m constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_m$. Consideremus in aequationibus

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, & \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m, \end{cases}$$

e quibus sequebantur aequationes §^{i}. antec. (10.*) — (18.*), ipsas $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_m$ ut constantes, unde ex aequationibus illis fiunt $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_1, p_2, \ldots p_m$ solius t functiones. Ac scribendo $-H$ loco T_i in parte laeva aequationum (16.*), (17.*) §^{i}. antec. obtinemus $2m$ aequationes differentiales, quibus aequationes (2.) satisfaciunt:

$$(3.) \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = \frac{dp_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{dq_{i'}}{dt},$$

quibus in formulis indici i' valores 1, 2, ... m tribuendi sunt. Aequationes vero (10.*) — (15.*) suppeditant theorema propositum, videlicet: differentialia partialia variabilium secundum elementa differentialibus partialibus elementorum secundum variabiles singula singulis aequivalere. Casu, quo functio H ipsam t non implicat, qui est frequentissimus in problematis mechanicis, ita agere licet. Statuamus, in §^{o}. antec. functionem V quantitates $t_1, t_2, \ldots t_\mu$ omnino non implicare; porro loco a_m scribamus h, loco b_m vero $t+\tau$. Unde aequationes (1.), (2.) §^{i}. antec. fiunt:

$$(4.) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(5.) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau.$$

Eliminatis e (4.) quantitatibus $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$, prodeat

$$H = h,$$

designante H functionem ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, quae ipsam h non implicat. Unde vice versa considerari potest V ut solutio completa aequationis differentialis partialis:

$$H = h,$$

in qua $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae (constantem arbitrariam,

quae functioni V sola additione iungi potest, ut plerumque, non respicimus) atque h constans data, quae ipsam iam aequationem differentialem afficit. Consideremus porro in aequationibus (4.), (5.) ipsas a_1, a_2, ... a_{m-1}, h, b_1, b_2, ... b_m, τ ut constantes, erunt per aequationes illas ipsae q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m datae functiones quantitatis t. Ponamus in aequationibus (13.*), (14.*) §^{i}. antec. $i=m$, atque, sicuti convenimus, loco a_m, b_m scribamus h atque $t+\tau$, in parte laeva aequationum illarum exprimendum erit a_m sive h per ipsas q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m ope aequationum (4.), (5.), sive loco a_m ponendum est H. Quo facto, si insuper animadvertimus, loco expressionum $\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m}$, $\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m}$ sive $\frac{\partial q_{i'}}{\partial (t+\tau)}$, $\frac{\partial p_{i'}}{\partial (t+\tau)}$ scribendum esse, si t ut variabilis independens spectetur,

$$\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m} = \frac{dq_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m} = \frac{dp_{i'}}{dt},$$

abeunt aequationes (13.*), (14.*) in systema aequationum differentialium vulgarium, quae aequationibus (4.), (5.) satisfaciunt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = -\frac{dp_{i'}}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{dq_{i'}}{dt}.$$

Ac vice versa aequationibus (4.), (5.) hae aequationes differentiales complete integrantur. Porro aequationes §^{i} antec. (10.*), (11.*), (13.*), (14.*) suppeditant formulas:

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}, \qquad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}, \qquad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

in quibus indici i valores 1, 2, ... $m-1$, indici i' valores 1, 2, ... m tribuendi sunt; atque fit:

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial h}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial h},$$

in quibus aequationibus indici i' rursus valores 1, 2, ... m tribuendi sunt*).

---

*) Formulae eiusmodi, cum Academia Berolinensi scientiarum communicatae, iam inveniuntur in commentatiuncula „Neues Theorem der analytischen Mechanik", huius diarii tom. XXX, p. 117. *C.*

Formulae antecedentes applicantur in motum liberum n punctorum materialium quo aequatio conservationis virium vivarum locum habet.

71.

Operae pretium mihi videtur, nonnulla eorum, quae antecedentibus invenimus, pro casu systematis liberi per vires internas sollicitati seorsim theoremate exponere. Quo casu loco quantitatum q_i ponamus coordinatas orthogonales, unde loco ipsarum p_i ponendae erunt expressiones $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$.

Theorema.

Consideremus motum systematis liberi n punctorum materialium; sint x_i, y_i, z_i *coordinatae orthogonales puncti, cuius massa* m_i, *ac sollicitentur singula puncta* m_i *secundum directiones axium coordinatarum viribus* $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ *talibus, ut evadat summa*

$$\Sigma m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

extensa ad puncta omnia systematis, differentiale completum

$$dU = \Sigma m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

qui habetur casus, quoties systema punctorum materialium tantum viribus internis attractionis aut repulsionis sollicitatur. Ad inveniendum motum systematis, integretur aequatio differentialis partialis:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right\} = U + h,$$

in qua h est constans; inventaque solutione completa V, quae praeter constantem, quae sola additione ei iungi potest, constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}$ *implicet, erunt aequationes finitae, quibus motus punctorum materialium definiuntur:*

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

designantibus $b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}, \tau$ *novas constantes arbitrarias; porro erit*

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n \frac{dx_n}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 \frac{dy_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n \frac{dy_n}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 \frac{dz_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 \frac{dz_2}{dt}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n \frac{dz_n}{dt}.$$

Per aequationes propositas, statuto

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

considerari possunt $6n$ *quantitates* x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' *ut functiones* $6n$ *quantitatum* a_1, a_2, $\ldots$ a_{3n-1}, h, b_1, b_2, $\ldots$ b_{3n-1}, $t+\tau$, *vel vice versa spectari possunt* $6n$ *quantitates* a_1, a_2, $\ldots$ a_{3n-1}, h, b_1, b_2, $\ldots$ b_{3n-1}, $t+\tau$, *ut functiones* $6n$ *quantitatum* x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'.

Si sub utraque suppositione functionum illarum quotientes differentiales partiales sumuntur, quotientes differentiales partiales sub altera suppositione sumtae quotientibus differentialibus partialibus sub altera suppositione sumtis singulae singulis aequales fiunt aut tantum signo differunt; fit enim, designante i *unum quemcunque e numeris* $1, 2, \ldots n$, *atque* k *unum quemcunque e numeris* $1, 2, 3, \ldots 3n-1$:

$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial x_i'}, \qquad m_i \frac{\partial x_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i'},$$

$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial y_i'}, \qquad m_i \frac{\partial y_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial y_i'},$$

$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial z_i'}, \qquad m_i \frac{\partial z_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial z_i'},$$

$$m_i \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{\partial y_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{\partial z_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial z_i}, \qquad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial z_i};$$

$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i'}, \qquad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i'}, \qquad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i'}, \qquad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_i}.$$

Statuamus propositos motus perturbari, viribus $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ *punctum* m_i *sollicitantibus accedentibus novis viribus* $m_i X_i'$, $m_i Y_i'$, $m_i Z_i'$, *designantibus* X_i', Y_i', Z_i' *functiones omnium* $3n$ *coordinatarum* x_i, y_i, z_i *atque temporis* t,

ac sit, si solae coordinatae variantur neque simul tempus, summa

$$\Sigma m_i \{ X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i \},$$

extensa ad puncta omnia systematis, variatio completa

$$-\delta\Omega = \Sigma m_i \{ X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i \};$$

quibus statutis, aequationes problematis imperturbati

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 x_1', \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 x_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n x_n',$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 y_1', \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 y_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n y_n',$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 z_1', \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 z_2', \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n z_n'$$

etiam motus suppeditabunt perturbatos, si loco elementorum $a_1, a_2, \ldots a_{3n-1}$, h, $b_1, b_2, \ldots b_{3n-1}$, τ *sumuntur functiones temporis satisfacientes aequationibus differentialibus:*

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \cdots \quad \frac{da_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{3n-1}},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \cdots \quad \frac{db_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{3n-1}},$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

quibus in aequationibus supponitur, functionem Ω *ope aequationum pro motu imperturbato inventarum*

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

per sola elementa et tempus expressam esse.

Aequatio differentialis partialis in theoremate antecedente proposita invenitur ex aequatione

$$H = T - U = h,$$

quum sit T semissis summae virium vivarum

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \{ x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i' \};$$

aequationes vero

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

in aequatione $H = h$ substituendae, quo aequatio differentialis partialis evadat,

hic sunt

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Unde aequatio

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i') - U = h,$$

abit in aequationem

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} - U = h,$$

quae est aequatio differentialis partialis in theoremate antecedente proposita. Formulae perturbatoriae theorematis e §. 52. petitae sunt, scriptis h et τ loco a et b. Eaedem expressiones differentialium elementorum habentur etiam pro generalioribus aequationibus differentialibus, in quibus Ω praeter ipsas x_i, y_i, z_i etiam quantitates x_i', y_i', z_i' involvere potest:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i'}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i' + \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i' + \frac{\partial \Omega}{\partial z_i'},$$

$$m_i \frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial z_i},$$

quae, quoties Ω ipsas non implicat x_i', y_i', z_i' in aequationes differentiales perturbatas, quae vulgo habentur, redeunt:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial (U - \Omega)}{\partial z_i}.$$

Si theorema antecedens ad motum ellipticum planetarum applicare placet, ponamus, uti in formulis §. 67 factum est,

$$h = -\frac{\varkappa^2}{2A}, \qquad a_1 = \varkappa \sqrt{p} \cos i, \qquad a_2 = \varkappa \sqrt{p},$$

$$b = \tau, \qquad b_1 = \Omega, \qquad \frac{\pi}{2} + b_2 = \varpi,$$

designantibus A, p, i, $-\tau$, Ω, ϖ semiaxem maiorem, parametrum, inclinationem, tempus perihelii, longitudinem nodi ascendentis, distantiam perihelii a nodo ascendente, atque $\varkappa^2$ vim attractivam pro unitate distantiae. Si x, y, z, x', y', z' per A, p, $\sqrt{p}\cos i$, τ, Ω, ϖ, t vel vice versa A, p, i, τ, Ω, ϖ per x, y, z, x', y', z' exprimimus, et expressiones illas sub utraque suppositione differentiamus, prodeunt e theoremate antecedente formulae:

$$\frac{\partial x}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=-\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\Omega}=\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\Omega}=\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\Omega}=\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\sqrt{p}}=-\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\sqrt{p}}=-\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\sqrt{p}}=-\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varpi}=\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial x'},\quad \frac{\partial y}{\partial\varpi}=\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial y'},\quad \frac{\partial z}{\partial\varpi}=\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial z'},$$

$$2A^2\frac{\partial x}{\partial A}=-\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial x'},\quad 2A^2\frac{\partial y}{\partial A}=-\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial y'},\quad 2A^2\frac{\partial z}{\partial A}=-\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial.\sqrt{p}\cos i}=\varkappa\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\Omega}=-\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\Omega}=-\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\Omega}=-\varkappa\frac{\partial.\sqrt{p}\cos i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\sqrt{p}}=\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\sqrt{p}}=\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\sqrt{p}}=\varkappa\frac{\partial\varpi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial\varpi}=-\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial x},\quad \frac{\partial y'}{\partial\varpi}=-\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial y},\quad \frac{\partial z'}{\partial\varpi}=-\varkappa\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial z},$$

$$2A^2\frac{\partial x'}{\partial A}=\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad 2A^2\frac{\partial y'}{\partial A}=\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial y},\quad 2A^2\frac{\partial z'}{\partial A}=\varkappa^2\frac{\partial\tau}{\partial z}.$$

Quibus in formulis designat i inclinationem plani orbitae ad unum planorum coordinatarum orthogonalium x, y, z, atque Ω angulum, quem intersectio utriusque plani cum altera axi coordinatarum facit, quae in plano illo coordinatarum ducta est. E formulis notis motus elliptici verificationem formularum praecedentium facile obtinere licet. Quae facile etiam in alias varias formas transfunduntur.

De expressionibus (φ, ψ) ***et*** $[\varphi, \psi]$, ***quae in modum coefficientium in ill. Lagrange et Poisson formulis perturbatoriis obvenientium conflatae sunt. Innotescente integrali quolibet*** $H_i = a_i$ ***aequationum dynamicarum, differentialia omnia functionis cuiuslibet secundum elementum*** b_i, ***quod ipsi*** a_i ***in systemate quolibet elementorum canonico fiat coniugatum, assignari possunt.***

72.

Statuamus rursus:

$$[\varphi,\psi]=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}$$

porro, uncis rotundis adhibitis,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial q_1}{\partial \psi}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_2}{\partial \psi}\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \psi}\frac{\partial p_m}{\partial \varphi}$$
$$- \frac{\partial q_1}{\partial \varphi}\frac{\partial p_1}{\partial \psi} - \frac{\partial q_2}{\partial \varphi}\frac{\partial p_2}{\partial \psi} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \varphi}\frac{\partial p_m}{\partial \psi}$$

facile probatur e formulis §. 69 traditis, haberi

$$(1.) \quad [a_i, a_k] = 0, \quad [a_i, b_k] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0,$$
$$(2.) \quad (a_i, a_k) = 0, \quad (a_i, b_k) = 0, \quad (b_i, b_k) = 0,$$

exceptis aequationibus:

$$(3.) \quad [a_i, b_i] = -1, \qquad (4.) \quad (a_i, b_i) = 1.$$

Formulae (1.) ad suppositionem secundam pertinent, qua consideravimus ipsas a_i, b_i ut functiones ipsarum q_i, p_i, t_i; formulae (2.) ad suppositionem primam, qua considerantur q_i, p_i ut functiones ipsarum a_i, b_i, t_i. Quae formulae e (10.*) seqq. §. 69 sic demonstrantur:

Habetur, extensa summatione ad ipsius i' valores 1, 2, ... m:

$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial a_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial b_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial b_i} = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\},$$

exceptis casibus, quibus in aequatione prima et quarta fit $k = i$, quibus casibus habetur:

$$1 = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\right\},$$
$$1 = \Sigma_{i'}\left\{\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\right\}.$$

Substituamus in formulis praecedentibus aequationes (10.*), (11.*), (13.*), (14.*) §. 69

$$\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} = \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} = -\frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}},$$

abeunt illae in sequentes:

$$-[a_k, b_i] = 0, \quad [a_k, a_i] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0, \quad -[a_i, b_k] = 0,$$
$$1 = -[a_i, b_i] = [b_i, a_i],$$

quae conveniunt cum aequationibus demonstrandis (1.), (3.).

Porro in iisdem formulis easdem substituamus aequationes (10.*) — (14.*) §. 69, in quibus tamen loco indicis i scribamus k, unde evadunt:

$$\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}.$$

Quibus substitutis, aequationes supra traditae in sequentes abeunt:

$$0 = (a_i, b_k), \quad 0 = (b_i, b_k), \quad 0 = (a_k, a_i), \quad 0 = (a_k, b_i)$$
$$1 = (a_i, b_i),$$

quae sunt aequationes demonstrandae (2.), (4.).

Sint φ, ψ datae quaecunque functiones ipsarum a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m, quae quantitates t_1, t_2, ... t_μ non contineant. Substitutis ipsarum a_i, b_i, valoribus per q_i, p_i, t_i expressis, evadant φ, ψ harum quantitatum functiones, eritque

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_{i'} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \right\} =$$

$$\Sigma_{i'} \begin{Bmatrix} \Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} \right) \Sigma_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} \right) \\ -\Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} \right) \Sigma_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} \right) \end{Bmatrix}.$$

Quae expressio sic repraesentari potest:

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [a_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [a_i, b_k] \right\}$$
$$+ \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [b_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [b_i, b_k] \right\},$$

unde e (1.), (3.) habetur:

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_i} \right\},$$

sive

(5.)
$$\begin{cases} [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \quad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \\ \quad = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} \frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial b_m} \frac{\partial \psi}{\partial a_m} \\ \quad - \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \frac{\partial \psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} \frac{\partial \psi}{\partial b_m}. \end{cases}$$

Quoties igitur accidit, ut φ, ψ sint eiusmodi ipsarum q_i, p_i, t_i functiones, quae per solas a_i, b_i absque quantitatibus t_i exprimi queant, erit etiam

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}$$

eiusmodi functio, quippe quae aequalis fit expressioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}\frac{\partial\psi}{\partial a_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial b_2}\frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial b_m}\frac{\partial\psi}{\partial a_m}$$
$$- \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\frac{\partial\psi}{\partial b_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\frac{\partial\psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial a_m}\frac{\partial\psi}{\partial b_m},$$

quae, si φ et ψ sint solarum a_i, b_i functiones ab ipsis t_i vacuae, et ipsa erit solarum a_i, b_i functio ab ipsis t_i libera. Si quantitatum t_i una tantum in problemate proposito adest, quam t vocemus, redit propositio antecedens in eam, quam olim ill. *Poisson* demonstravit, quoties $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ sint integralia systematis aequationum differentialium

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ *)},$$

quantitatem $[\varphi, \psi]$ per sola elementa absque t exprimi.

Casus specialis aequationis (5.) valde memorabilis is est, quo functio ψ uni quantitatum a_i, b_i aequalis existit; tum enim abit aequatio illa in has simplices:

$$(6.) \quad \begin{cases} [\varphi, a_i] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial b_i}, \\ [\varphi, b_i] = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_i}. \end{cases}$$

Docent hae aequationes sequentia: *Quoties enim habetur aequationum differentialium propositarum integrale*

$$\varphi = \text{Const.},$$

φ per ipsas a_i, b_i absque t exprimi potest, quam vero expressionem ipsam

*) Aequationes differentiales ill. *Poisson* sub alia forma exhibuit; licet enim iam ille animadverterit in commentatione prima de Variatione Constantium, expressiones ipsis $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dq_k}{dt}$ aequales per q_i, p_i exhibitas ita comparatas esse, ut prioris differentiale secundum p_k alterius differentiali secundum p_i aequale sit; expressionem simplicem ipsius $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, unde illud sponte sequitur, primus ill. ***Hamilton*** dedit.

generaliter exhibere non possumus, nisi omnium a_i, b_i expressiones per q_i, p_i, t datae sint. At si vel unius novimus elementi, quod ad systema elementorum canonicum pertinet, expressionem per q_i, p_i, t, directe invenire licet differentialia ipsius φ secundum elementum coniugatum sumta et ipsa per q_i, p_i, t expressa, siquidem bina a_i et b_i elementa coniugata dicimus. Nam si elementum canonicum datum est a_i, habetur e (6.):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = [\varphi, a_i],$$

unde ponendo $\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}$, etc. loco φ, prodit:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, a_i\right], \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial b_i^3} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}, a_i\right], \qquad \text{etc.}$$

unde successive omnium $\frac{\partial^n \varphi}{\partial b_i^n}$ innotescunt valores per q_i, p_i, t expressi. Si tantum unum habetur integrale, $\psi = a_i$, poterit constans ipsi ψ aequalis pro elemento canonico accipi; excipias tamen casum, quo $\psi = H$, quod fieri potest, si H ipsam t non involvit, quippe quo casu, quoties $\varphi = \text{Const.}$ est integrale alterum, habetur $[\varphi, a_i] = 0$ neque aliquid novi inde prodit.

Ad illustrandas aequationes (6.), quae magnas partes agere debent in ulterioribus et altioribus disquisitionibus, quas integrationes propositae flagitant, ut omnia quae hic adhuc latent, enucleentur, directe eas de aequationibus §. 69 propositis deducam. Quod fit per consideraciones sequentes. Sit enim a_i data functio ipsarum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t$, ac consideremus ipsam t, siquidem t in functione a_i invenitur, ut constantem datam atque omnes $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ praeter unam b_i ut constantes arbitrarias, erunt $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ functiones ipsius b_i, quae satisfaciunt aequationibus differentialibus (13.*), (14.*) §. 69:

$$\frac{dq_1}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_m},$$

quae plane eandem formam habent atque aequationes differentiales propositae, modo functio a_i functionis H atque variabilis b_i variabilis t locum tenet. Per regulas autem vulgares differentiationis ex aequationibus praecedentibus cuiuslibet functionis ipsarum $q_{i'}$, $p_{i'}$ differentialia prima, secunda, tertia etc. successive eruuntur, continuo differentialium $\frac{dq_{i'}}{db_i}$, $\frac{dp_{i'}}{db_i}$ valores substituendo;

quemadmodum tritum est, ex systemate aequationum differentialium

$$\frac{dq_{i'}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}}, \qquad \frac{dp_{i'}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}}$$

cuiuslibet functionis differentialia cuiuslibet ordinis per ipsas $q_{i'}$, $p_{i'}$, t, expressa inveniri posse. Si ex. gr. functionis φ differentiale primum secundum b_i quaeris, eruis:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{db_i} &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{db_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{dq_m}{db_i} \\
&\quad + \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{db_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{dp_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{dp_m}{db_i} \\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial a_i}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial a_i}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial a_i}{\partial p_m} \\
&\quad - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial a_i}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial a_i}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial a_i}{\partial q_m} \\
&= [\varphi, a_i],
\end{aligned}$$

quae est altera aequationum (6.); eademque methodo demonstratur altera.

Observo adhuc, in formulis §. 69 et antecedentibus, quae ex iis derivatae sunt, ubique a, b atque q, p inter se permutari posse.

Ipsis a_i, b_i per alias quantitates α, β, γ etc. expressis, quaeramus adhuc valorem expressionis:

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= \frac{\partial q_1}{\partial\beta}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial\beta}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial\beta}\frac{\partial p_m}{\partial\alpha} \\
&\quad - \frac{\partial q_1}{\partial\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial\beta} - \frac{\partial q_2}{\partial\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial\beta} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\frac{\partial p_m}{\partial\beta}.
\end{aligned}$$

Fit $(\alpha, \beta) =$

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\beta} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right)\right\}$$

$$-\Sigma\left\{\left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\beta} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\right)\right\},$$

indicibus i', i, k tributis valoribus 1, 2, ... m. Evolutis productis ex aequatione praecedente eruimus $(\alpha, \beta) =$

$$\Sigma\left\{(a_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial\beta}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + (b_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial\beta}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha} + (a_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\frac{\partial a_k}{\partial\alpha} + (b_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial\beta}\frac{\partial b_k}{\partial\alpha}\right\},$$

indicibus i et k sub signo summatorio tributis valoribus 1, 2, ... m. Sed e formulis (2.) eavnescunt sub signo summatorio termini omnes,

pro quibus k et i inter se diversi sunt; unde quum e (4.) sit

$$(a_i, b_i) = 1,$$

atque sponte pateat fieri

$$(a_i, a_i) = 0, \quad (b_i, b_i) = 0,$$

sequitur

$$(\alpha, \beta) = \Sigma \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} \frac{\partial b_i}{\partial \beta} - \frac{\partial a_i}{\partial \beta} \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} \right\},$$

sive

$$(7.) \quad \begin{cases} (\alpha, \beta) = \dfrac{\partial q_1}{\partial \beta} \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \beta} \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \dfrac{\partial q_m}{\partial \beta} \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha} \\ \qquad - \dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha} \dfrac{\partial p_1}{\partial \beta} - \dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha} \dfrac{\partial p_2}{\partial \beta} - \cdots - \dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha} \dfrac{\partial p_m}{\partial \beta} \\ \qquad = \dfrac{\partial a_1}{\partial \alpha} \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta} + \dfrac{\partial a_2}{\partial \alpha} \dfrac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \dfrac{\partial a_m}{\partial \alpha} \dfrac{\partial b_m}{\partial \beta} \\ \qquad - \dfrac{\partial a_1}{\partial \beta} \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial a_2}{\partial \beta} \dfrac{\partial b_2}{\partial \alpha} - \cdots - \dfrac{\partial a_m}{\partial \beta} \dfrac{\partial b_m}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Statuamus, ipsam β ex elementis canonicis esse sive haberi $\beta = a_i$ aut $\beta = b_i$, atque reliquorum elementorum expressiones hoc elementum non continere. Quo casu formula antecedens abit in sequentes simplices:

$$(8.) \quad \begin{cases} (\alpha, a_i) = -\dfrac{\partial b_i}{\partial \alpha}, \\ (\alpha, b_i) = \dfrac{\partial a_i}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Quibus adnotatis pauca de formulis generalibus perturbatoriis addam, quae de systemate elementorum quocunque valent.

Formularum perturbatoriarum systemata quae ill. Lagrange et Poisson posuerunt, demonstrantur et alterum ex altero derivantur.

73.

Loco ipsorum a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m habeatur systema elementorum quodcunque, α_1, α_2, ... α_{2m}. Quorum respectu formulas perturbatorias sub duabus maxime formis proponere convenit. In altera, quae ill^i *Lagrange* est, differentialia partialia functionis perturbatricis Ω secundum elementa sumta lineariter exprimuntur per differentialia elementorum; in altera, quae ill^i *Poisson* est, differentialia elementorum perturbatorum lineariter exprimuntur per differentialia partialia functionis perturbatricis Ω secundum elementa sumta. In altera forma expressionum linearium coefficientes sunt

functiones (α_i, α_k), in altera functiones $[\alpha_i, \alpha_k]$. Plerumque adnotari solet, alteram formam ex altera per solam resolutionem aequationum $2m$ linearium obtineri posse. Sed nemo, quantum scio, hanc resolutionem reapse tentavit eaque via directa alteram formam de altera derivavit. Quod quum utile sit et difficultatis speciem quandam habeat, ego sequentibus exponam; antea autem formulas perturbatorias generales de formulis supra traditis deducam, licet eaedem directe ex ipsis aequationibus differentialibus peti possint, sicuti plerumque fit.

Spectentur *primum* elementa canonica $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ ut functiones aliorum elementorum quorumcunque $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$: erit e §. 52:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n} &= \Sigma_i \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n} + \frac{\partial\Omega}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n} \right\} \\ &= \Sigma_i \left\{ \frac{db_i}{dt}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n} - \frac{da_i}{dt}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n} \right\} \\ &= \Sigma_{i,k} \left\{ \frac{\partial b_i}{\partial\alpha_k}\frac{\partial a_i}{\partial\alpha_n} - \frac{\partial a_i}{\partial\alpha_k}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_n} \right\} \frac{d\alpha_k}{dt},\end{aligned}$$

quibus in summis ipsi i valores $1, 2, \ldots m$, ipsi k valores $1, 2, \ldots 2m$ tribuendi sunt. Unde e (7.) §. antec. fit

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n} = \Sigma_k (\alpha_n, \alpha_k)\dfrac{d\alpha_k}{dt} \\ \quad = (\alpha_n, \alpha_1)\dfrac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_n, \alpha_2)\dfrac{d\alpha_2}{dt} + \cdots + (\alpha_n, \alpha_{2m})\dfrac{d\alpha_{2m}}{dt}. \end{cases}$$

Spectentur *deinde* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ ut functiones ipsarum $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$: habetur e §. 52:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_n}{dt} &= \Sigma_i \left\{ \frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{da_i}{dt} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt} \right\} \\ &= \Sigma_i \left\{ -\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial\Omega}{\partial b_i} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial\Omega}{\partial a_i} \right\} \\ &= \Sigma_{i,k} \left\{ -\frac{\partial\alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial\alpha_k}{\partial b_i} + \frac{\partial\alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial\alpha_k}{\partial a_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k},\end{aligned}$$

quibus in summis ipsi i rursus valores $1, 2, \ldots m$, ipsi k valores $1, 2, \ldots 2m$ tribuendi sunt. Unde e (5.) §. antec. scribendo α_n, α_k loco φ, ψ prodit:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_n}{dt} = \Sigma_k [\alpha_n, \alpha_k]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k} \\ \quad = [\alpha_n, \alpha_1]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + [\alpha_n, \alpha_2]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \cdots + [\alpha_n, \alpha_{2m}]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_{2m}}. \end{cases}$$

Formulae (1.) ab ill. *Lagrange*, formulae (2.) ab ill. *Poisson* traditae sunt. Aliae de aliis derivari possunt ope theorematis sequentis:

Theorema:

Sint $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ *functiones quaecunque a se invicem independentes quantitatum* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$, *ita ut invicem spectari possint* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ *ut functiones a se invicem independentes quantitatum* $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$; *statuatur in suppositione priori:*

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_k},$$

in suppositione posteriori:

$$[\alpha_i, \alpha_k] = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_1} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_m};$$

quibus statutis significationibus, si proponuntur $2m$ *aequationes lineares sequentes:*

$$\begin{aligned}
v_1 &= \quad * \quad + (\alpha_1, \alpha_2)u_2 + (\alpha_1, \alpha_3)u_3 + \cdots + (\alpha_1, \alpha_{2m})u_{2m},\\
v_2 &= (\alpha_2, \alpha_1)u_1 + \quad * \quad + (\alpha_2, \alpha_3)u_3 + \cdots + (\alpha_2, \alpha_{2m})u_{2m},\\
v_3 &= (\alpha_3, \alpha_1)u_1 + (\alpha_3, \alpha_2)u_2 + \quad * \quad + \cdots + (\alpha_3, \alpha_{2m})u_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_{2m} &= (\alpha_{2m}, \alpha_1)u_1 + (\alpha_{2m}, \alpha_2)u_2 + (\alpha_{2m}, \alpha_3)u_3 + \cdots + \quad * \quad ,
\end{aligned}$$

eruuntur resolutione harum aequationum valores ipsarum $u_1, u_2, \ldots u_{2m}$ *sequentes:*

$$\begin{aligned}
u_1 &= \quad * \quad + [\alpha_1, \alpha_2]v_2 + [\alpha_1, \alpha_3]v_3 + \cdots + [\alpha_1, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
u_2 &= [\alpha_2, \alpha_1]v_1 + \quad * \quad + [\alpha_2, \alpha_3]v_3 + \cdots + [\alpha_2, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
u_3 &= [\alpha_3, \alpha_1]v_1 + [\alpha_3, \alpha_2]v_2 + \quad * \quad + \cdots + [\alpha_3, \alpha_{2m}]v_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{2m} &= [\alpha_{2m}, \alpha_1]v_1 + [\alpha_{2m}, \alpha_2]v_2 + [\alpha_{2m}, \alpha_3]v_3 + \cdots + \quad * \quad ,
\end{aligned}$$

et vice versa harum aequationum resolutione illae obtinentur.

Demonstratio:

Multiplicemus aequationes propositas per

$$[\alpha_i, \alpha_1], \quad [\alpha_i, \alpha_2], \quad \ldots \quad [\alpha_i, \alpha_{2m}]$$

et productorum summationem instituamus. Unde prodibit expressio huiusmodi:

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_{2m} u_{2m},$$

in qua:

$$\begin{aligned} A_k &= [\alpha_i, \alpha_1](\alpha_1, \alpha_k) + [\alpha_i, \alpha_2](\alpha_2, \alpha_k) + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}](\alpha_{2m}, \alpha_k) \\ &= \Sigma_n [\alpha_i, \alpha_n](\alpha_n, \alpha_k) \\ &= \Sigma_n \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_m} \\ -\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_m} \end{array} \right\} \times \\ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_n} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_n} + \cdots + \dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_n} \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_n} - \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_n} - \cdots - \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_n} \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

qua in summa ipsi n valores 1, 2, ... $2m$ tribuendi sunt. Eandem expressionem facta multiplicatione sic repraesentare licet:

$$\begin{aligned} A_k = {} & \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right\} \\ & + \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right\} \\ & - \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right\} \\ & - \Sigma_{i',k'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right\}, \end{aligned}$$

quibus in summis ipsi n valores 1, 2, ... $2m$, ipsis i', k' valores 1, 2, ... m tribuendi sunt. Iam vero habetur:

$$\Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial p_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial q_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial p_{i'}},$$

$$\Sigma_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial q_{i'}},$$

quarum expressionum tertia et quarta semper evanescunt, prima et secunda evanescunt, si i' et k' inter se diversi sunt, in unitatem abeunt, si $i' = k'$. Unde fit:

$$A_k = \Sigma_{i'} \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial \alpha_k} \right\} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k}.$$

Quae expressio quum evanescat nisi sit $i = k$, hoc autem casu in unitatem abeat, videmus, in parte posteriore aequationis:

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_{2m} u_{2m}$$

coefficientes A_1, A_2, ... A_{2m} praeter unum A_i evanescere omnes, fieri autem $A_i = 1$. Unde aequatio antecedens haec evadit:

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} = u_i,$$

in qua, si ipsi i successive valores 1, 2, ... $2m$ tribuuntur, eruuntur ipsarum u_1, u_2, ... u_{2m} valores in theoremate proposito assignati.

Prorsus simili methodo vice versa e secundo systemate aequationum in theoremate antecedente propositarum systema primum derivari potest.

Ueber die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion.

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Sind die Krümmung und Torsion einer Curve als Functionen des Bogens gegeben, so ist ihre Gestalt unabhängig von ihrer Lage vollständig bestimmt. Um daraus ihre Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, hat man sechs Integrationen zu vollziehen, entsprechend den sechs Constanten, welche ihre Lage im Raume bestimmen. Dies ist in zwei Fällen leicht: 1) wenn die Torsion $=0$ ist; 2) wenn sie ein constantes Verhältniss zur Krümmung hat. Ausserdem giebt es noch manche sehr einfache Relationen zwischen beiden Variabeln, welche die Integration zulassen. Obgleich die allgemeine Lösung der Aufgabe nicht wohl möglich ist, so scheinen mir doch einige Reductionen, deren sie fähig ist, an sich von Interesse zu sein, namentlich insofern daraus ersichtlich wird, wovon die Integrabilität im speciellen Falle abhängt. Ich erlaube mir, von den Benennungen Gebrauch zu machen, welche ich in meinem letzten Aufsatze (Band 58, p. 374) erklärt habe.

I.

Bezeichnen τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel einer Curve (d. i. die Integrale der Contingenzwinkel der Tangenten und Osculationsebenen); u, v, w die cos. der Winkel, welche die Tangente, Pollinie und Hauptnormale mit irgend einer Axe bilden; so ist wegen der senkrechten Lage dieser Geraden:

$$(1.) \qquad u^2+v^2+w^2 = 1$$

und gemäss bekannten Formeln:

$$\partial u = w\partial\tau; \quad \partial v = -w\partial\vartheta; \quad \partial w = v\partial\vartheta - u\partial\tau,$$

woraus hervorgeht:

$$(2.) \qquad v = \frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\left(u+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right); \qquad u = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\left(v+\frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2}\right).$$

Jenachdem man nun v oder u nebst w aus Gleichung (1.) eliminirt, erhält man

$$(3.) \qquad \left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2\left(u+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right)^2+u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 = 1,$$

$$(4.) \qquad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right)^2\left(v+\frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2}\right)^2+v^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right)^2 = 1.$$

Hiernach steht jede Curve im Allgemeinen mit einer zweiten in der gegenseitigen Beziehung, dass der Krümmungswinkel der einen der Torsionswinkel der anderen, und die Tangente der einen parallel der Pollinie der anderen

ist. Die Integration einer der vorstehenden Gleichungen erledigt somit die zwei Fälle gegebener Functionen

$$\varphi(\tau, \vartheta) = 0, \qquad \varphi(\vartheta, \tau) = 0$$

zu gleicher Zeit. Das Folgende mag sich deshalb auf Betrachtung der Gleichung (3.) beschränken. Demgemäss soll τ als unabhängige Variable betrachtet werden, und die Accente Differentialquotienten nach derselben bezeichnen.

Nach einmaliger Differentiation und Ausscheidung des Factors $u+u''$ giebt Gleichung (3.):

$$(5.) \qquad u''' + (1+\vartheta'^2)u' - \frac{\vartheta''}{\vartheta'}(u+u'') = 0.$$

Das vollständige Integral dieser linearen Gleichung hat die Form:

$$u = au_1 + bu_2 + cu_3,$$

doch sind die Constanten a, b, c einer Relation unterworfen, die sich durch Einführung in Gleichung (3.) ergiebt. Wählt man dann drei Systeme der a, b, c so, dass die Quadratsumme der drei entsprechenden Werthe von $u=1$ wird, so stellen diese die cos. der Richtungswinkel der Tangente gegen drei rechtwinklige Axen dar, und geben nach Multiplication mit dem Differential des in τ ausgedrückten Bogens und folgender Integration die Coordinaten als Functionen von τ.

Da hiernach die Lösung der Aufgabe vollendet ist, ehe der Bogen in Rechnung kommt, so erhält man durch Integration der Gleichung (3.) für jede specielle Relation zwischen τ und ϑ eine Classe von Curven, deren gemeinsames Merkmal eben jene Relation ist, während die Function, die den Bogen beliebig in τ ausdrückt, die Verschiedenheit ihrer Gestalt bedingt. Die Abweichung kann hier allein in der Ausdehnung der einzelnen Bogenelemente stattfinden, so dass sich jede Klasse dem Auge leicht als zusammengehörig darstellt.

II.

Zur weiteren Transformation der Differentialgleichung setze man:

$$u = q\int \frac{\partial\tau}{q^2}\sqrt{q^2+q'^2},$$

woraus durch Auflösung nach q hervorgeht:

$$q = \sqrt{1-u^2}\, e^{i\int \frac{\partial\tau}{1-u^2}\sqrt{1-u^2-u'^2}}.$$

Dann geht Gleichung (3.) nach Ausscheidung des Factors

$$\left(\frac{q'}{q\sqrt{q^2+q'^2}} + \int \frac{\partial\tau}{q^2}\sqrt{q^2+q'^2}\right)^2$$

über in

$$(6.) \quad \left(\frac{q+q''}{\vartheta'}\right)^2 + q^2 + q'^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung würde man auch als besonderes Integral der Gleichung (5.) erhalten, wenn man die Integrationsconstante, welche gemäss Gleichung (3.) den Werth 1 haben muss, $=0$, und den entsprechenden Werth von $u = q$ setzte. Die vorstehende Herleitung zeigt, in welcher Beziehung die wirklichen Wurzeln der Gleichung (3.) zu diesen unbrauchbaren der Gleichung (5.) stehen.

Ferner sei

$$q = re^{-\int \frac{r\,dr}{4r'}},$$

woraus umgekehrt

$$r = \sqrt{q}\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{dq}{q}\sqrt{q^2+q'^2}}.$$

Dann geht Gleichung (6.) nach Ausscheidung des Factors

$$q^2\left(1+\frac{r^2}{4r'^2}\right)^2$$

über in

$$\frac{1}{\vartheta'^2}\left(\frac{r''}{r}+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{r'^2}{r^2} = 0,$$

woraus

$$(7.) \quad r'' \pm i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4} r = 0.$$

Die möglichen Transformationen dieser Gleichung sind bekannt. Die einfachste Form erhält sie durch die Substitution:

$$r = \frac{p}{\sigma}, \qquad \tau = 2\int \frac{\partial\sigma}{\sigma^2} e^{\pm i\vartheta}$$

nämlich die folgende:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\sigma^2} + \frac{p}{\sigma^4} e^{\pm 2i\vartheta} = 0.$$

III.

Ist eine Speciallösung der Gleichung (3.) bekannt, so ist die vollständige Lösung der Aufgabe durch ihre Zurückführung auf eine lineare Gleichung zweiter Ordnung verbürgt. Doch kann man auf weit kürzerem Wege dazu gelangen, als durch Vermittlung der Gleichung (7.). Sind nämlich

$$u = \cos\varphi\cos\psi, \qquad v = \sin\varphi\cos\psi, \qquad w = \sin\psi$$

die cos. der Richtungswinkel der Tangente; ist ferner w als Function von τ bekannt, und man setzt

$$\psi' = \sin\omega,$$

so sind auch ψ und ω bekannt. Für die cos. der Richtungswinkel der Hauptnormale findet man durch eine Differentiation folgende Werthe:

$$u' = -\varphi' \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \sin\omega,$$
$$v' = \varphi' \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sin\omega,$$
$$w' = \cos\psi \sin\omega$$

deren Quadratsumme ist:

$$1 = \varphi'^2 \cos^2\psi + \sin^2\omega.$$

Durch den hieraus gewonnenen Werth

$$\varphi = \int \frac{\cos\omega}{\cos\psi} \partial\tau$$

sind u, v und demzufolge

$$x = \int u \partial s, \quad y = \int v \partial s, \quad z = \int w \partial s$$

als Functionen von τ bekannt. Durch eine Orthogonalsubstitution lassen sich die fehlenden Integrationsconstanten, deren zwei im vollständigen Werthe von ψ, und eine in φ enthalten sein würden, leicht herstellen.

Die mittelst Gleichung (7.) sich ergebenden Ausdrücke von u, v sind weit complicirter als die soeben abgeleiteten; die Identität beider möchte überdiess wohl auf anderem Wege nicht in der Kürze nachzuweisen sein.

IV.

Ich füge noch die Lösungen für vier der einfachsten Fälle in ihrer einfachsten Specialform bei. Durch l, m, n seien die cos. der Richtungswinkel der Pollinie bezeichnet.

1) Ist $\vartheta' = 0$, so ist wie bekannt

$$u = \cos\tau, \quad v = \sin\tau, \quad w = 0,$$
$$u' = -\sin\tau, \quad v' = \cos\tau, \quad w' = 0,$$
$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 1.$$

2) Ist $\vartheta' = \operatorname{tg}\lambda$ constant, so geht Gleichung (5.) über in

$$u''' \cos^2\lambda + u' = 0.$$

Bestimmt man den constanten Factor des Integrals gemäss Gleichung (3.), so ergiebt sich:

$$u = \cos\lambda \cos\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad v = \cos\lambda \sin\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad w = \sin\lambda,$$
$$u' = -\sin\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad v' = \cos\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad w' = 0,$$
$$l = -\sin\lambda \cos\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad m = -\sin\lambda \sin\frac{\tau}{\cos\lambda}, \quad n = \cos\lambda.$$

3) Setzt man $w = \frac{\tau}{\alpha}$, so ergiebt sich die Relation:

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \alpha^2 - 1,$$

welche erfüllt wird durch die Werthe:

$$\tau = \sqrt{\alpha^2-1}\sin\lambda; \qquad \vartheta = -\sqrt{\alpha^2-1}\cos\lambda,$$

und man findet nach der im vorigen Abschnitte beschriebenen Methode leicht folgende Ausdrücke:

$$u = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\lambda\sin\lambda + \cos\alpha\lambda\cos\lambda,$$

$$v = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha\lambda\sin\lambda + \sin\alpha\lambda\cos\lambda,$$

$$w = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\sin\lambda,$$

$$u' = -\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\sin\alpha\lambda, \qquad v' = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\cos\alpha\lambda, \qquad w' = \frac{1}{\alpha},$$

$$l = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\lambda\cos\lambda - \cos\alpha\lambda\sin\lambda,$$

$$m = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha\lambda\cos\lambda - \sin\alpha\lambda\sin\lambda,$$

$$n = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\cos\lambda.$$

4) Setzt man $\omega = \psi$, so wird

$$\varphi = \tau, \qquad \vartheta = 2\psi, \qquad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4} = e^{\tau},$$

daher

$$u = \cos\tau\cos\frac{\vartheta}{2}, \qquad v = \sin\tau\cos\frac{\vartheta}{2}, \qquad w = \sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$u' = -\sin\tau\cos\frac{\vartheta}{2} - \cos\tau\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

$$v' = \cos\tau\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin\tau\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

$$w' = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$l = \left(\sin\tau - \cos\tau\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$m = -\left(\cos\tau + \sin\tau\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$n = \cos^2\frac{\vartheta}{2}.$$

V.

Geometrisch lässt sich das Problem auf folgende Weise reduciren. Beschreibt man mit der Linieneinheit als Radius eine Kugel um den Anfangspunkt der Coordinaten, und zieht mit der Tangente der Curve einerseits mit ihrer Pollinie andererseits zwei parallele Radien, so beschreiben diese auf der Kugelfläche zwei Curven, die einander parallel sind, weil der laufende Punkt

einer jeden auf der entsprechenden Normalebene der anderen liegt. Durch Vertauschung von Krümmung und Torsion der Urcurve geht die eine jener sphärischen Curven in die andere über. Es wird hinreichen, die Beziehung der ersten zur Urcurve zu untersuchen.

Unterscheidet man die Elemente dieser sphärischen Curve durch den Index 1, so sind ihre Gleichungen:

$$x_1 = u, \qquad y_1 = v, \qquad z_1 = w,$$

dies differentiirt giebt:

$$u_1 \partial s_1 = u' \partial \tau, \qquad v_1 \partial s_1 = v' \partial \tau, \qquad w_1 \partial s_1 = w' \partial \tau.$$

Durch Bildung der Quadratsumme zeigt sich, dass

$$(8.) \quad \begin{cases} & s_1 = \tau, \\ u_1 = u', & v_1 = v', \qquad w_1 = w' \end{cases}$$

ist. Eine zweite Differentiation ergiebt:

$$u_1' \partial \tau_1 = (l \operatorname{tg} \lambda - u) \partial \tau,$$

nebst zwei analogen Gleichungen, aus deren Quadratsumme erhellt, dass

$$(9.) \quad \begin{cases} \cos\lambda \, \partial \tau_1 = \partial \tau, \\ u_1' = l \sin\lambda - u \cos\lambda, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

und eine dritte Differentiation mit Zuziehung der Gleichungen (9.) giebt

$$l_1 \vartheta_1' - u_1 = \lambda' (l \cos\lambda + u \sin\lambda) \cos\lambda - u',$$

oder nach den Gleichungen (8.)

$$l_1 \vartheta_1' = \lambda' (l \cos\lambda + u \sin\lambda) \cos\lambda,$$

nebst zwei analogen Gleichungen, deren Quadratsumme ergiebt

$$\vartheta_1' = \lambda' \cos\lambda,$$

oder nach Gleichung (9.)

$$\partial \vartheta_1 = \partial \lambda.$$

Ferner lässt sich Gleichung (9.) auch schreiben:

$$s_1' = \cos\lambda,$$

welche Grösse den Krümmungsradius der sphärischen Curve ausdrückt.

Es hat sich ergeben, dass der Bogen der sphärischen Curve den Krümmungswinkel, ihr Krümmungsradius den Cosinus der Krümmungsbreite, und ihr Torsionswinkel die Krümmungsbreite der Urcurve selbst darstellt. Ist nun ϑ mithin auch $\lambda = \operatorname{arctg} \vartheta'$ in τ gegeben, so ist auch der Krümmungsradius der sphärischen Curve als Function ihres Bogens bekannt. Die anfänglich gestellte Aufgabe ist demnach auf die zurückgeführt: eine sphärische Curve aus der Relation zwischen Krümmung und Bogen zu berechnen.

Berlin, den 5ten Januar 1861.

Note sur les cubiques gauches.

(Par M. *L. Cremona* à Bologne.)

Une cubique gauche est déterminée par six conditions. Je me propose, dans cette *Note*, de construire une cubique gauche, lorsque les conditions données consistent en des points par lesquels elle doit passer, ou en des droites qui doivent rencontrer deux fois la courbe.

A cause de la réciprocité de ces courbes, on pourra en déduire la construction de la cubique gauche, si l'on donne des plans osculateurs ou des droites intersections de deux plans osculateurs.

Problème 1er. *Construire la cubique gauche qui passe par six points donnés.*

Ce problème a été déjà résolu, de différentes manières, par MM. *Seydewitz* *) et *Chasles* **).

Problème 2^d^. *Construire la cubique gauche qui passe par cinq points donnés, et qui rencontre deux fois une droite donnée.*

La courbe, dont il s'agit, est l'intersection des deux cônes (de second degré) qui contiennent les points donnés et la droite donnée. Le problème de construire les sommets de ces cônes (ce qui suffit pour réduire la question actuelle à la précédente) a été résolu par M. *Hesse* ***).

Problème 3e. *Construire la cubique gauche qui passe par quatre points donnés et qui rencontre deux fois deux droites données.*

Si par les points et par les droites données on peut faire passer un hyperboloide, le problème est indéterminé; car il y a un nombre infini de cubiques gauches situées sur un hyperboloide donné et passant par quatre points fixes de cette surface. Dans le cas contraire, il y a impossibilité.

Problème 4e. *Construire la courbe gauche qui passe par trois points donnés a, b, c et qui coupe deux fois trois droites données A, B, C.*

Les droites A, B et les points a, b, c déterminent un hyperboloide I; de même, les droites A, C avec les points a, b, c donnent un autre hyperboloide J; et la courbe demandée est l'intersection de ces deux hyperboloides. On peut la construire *par points*, de la manière qui suit. Soient p', q', r' les points où B rencontre les plans $A(a, b, c)$; et soient p, q, r les points que les droites ap', bq', cr' marquent sur A. Les paires de points p, p'; q, q'; r, r'

*) *Archiv der Mathematik und Physik*, X. Theil S. 208.

**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (Institut de France); 10 août 1857.

***) *Journal für die reine und ang. Mathematik*, XXVI. Band, S. 147.

déterminent, sur A, B, deux divisions homographiques; et les droites qui en joignent les points correspondans sont des génératrices de l'hyperboloide I. — De même, les points a, b, c donnent lieu à deux divisions homographiques sur A, C; et les droites qui en joignent les points homologues appartiennent à l'hyperboloide J.

Menons par A un plan quelconque qui rencontre B en m' et C en n''. Soient: m le point de A qui correspond à m'; et n le point de A qui correspond à n''. Le point où se coupent les droites mm', nn'' appartient évidemment à la cubique gauche demandée.

Problème 5e. *Construire la cubique gauche qui passe par deux points donnés o, o' et qui s'appuie deux fois sur quatre droites fixes A, B, C, D.*

Prenons les points o, o' comme centres de deux faisceaux homographiques, en menant quatre paires de plans homologues par les quatre droites données, respectivement. Tout plan passant par oo' contient deux rayons correspondans; le point de leur intersection est sur la courbe demandée.

Autrement. Soit I l'hyperboloide qui passe par la cubique gauche et par les droites A, B; et soit J l'hyperboloide contenant la cubique et les droites C, D. Les hyperboloides I, J auront nécessairement une génératrice commune, que nous allons déterminer. Les deux plans oA, oB s'entrecoupent suivant une droite génératrice de I; et l'intersection des plans oC, oD est une génératrice de J. Soit P le plan de ces deux génératrices. De même, on déduit un plan P', du point o'; et il est bien évident que la droite, qu'on cherche à déterminer, est l'intersection des plans P, P'. Ensuite, on construit la cubique gauche, *par points*, au moyen d'un plan mobile autour de PP'.

Problème 6e. *Construire la cubique gauche qui passe par un point o et qui s'appuie sur cinq droites données A, B, C, D, E* *).

Prenons un point o' sur E, et supposons qu'on cherche à construire la cubique gauche qui passe par o, o' et qui est coupée deux fois par les droites A, B, C, D. Dans ce but (prob. 5e, deuxième solution), je conçois les deux droites, dont l'une est l'intersection des plans oA, oB et l'autre est l'intersection des plans oC, oD; ces deux droites déterminent un plan (fixe) P. De même, on obtient un plan (variable avec o') P' déterminé par deux droites, dont l'une est l'intersection des plans $o'A$, $o'B$, et l'autre est l'intersection des plans $o'C$ et $o'D$.

*) J'ai donné autre part (tome LVIII de ce journal) la construction d'*une* des cubiques gauches (en nombre infini) qui s'appuient sur cinq droites données.

Le plan P' est tangent aux hyperboloides ABE et CDE, qui ont la droite commune E; donc, si o' parcourt E, le plan P' oscule une cubique gauche K, dont les plans osculateurs sont les plans tangens communs aux hyperboloides nommés.

La droite PP' avec A, B détermine un hyperboloide contenant la cubique gauche qui doit passer par o, o' et s'appuier deux fois sur A, B, C, D. Donc, si l'on veut obtenir la cubique gauche qui passe par o et s'appuie deux fois sur A, B, C, D, E, il faut chercher dans le plan P une droite L qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de K; ces plans marqueront sur E deux points de la courbe demandée. Ainsi, notre problème dépend de cet autre, qui admet (comme on le sait bien) toujours une seule solution:

Trouver, dans le plan P, la droite L qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche K, c'est-à-dire *l'intersection de deux plans tangens communs aux hyperboloides ABE, CDE.*

Commençons par construire un plan osculateur quelconque de K. Il suffit de mener par un point quelconque de E deux droites, dont l'une rencontre A, B et l'autre rencontre C, D. Le plan de ces deux droites est évidemment tangent aux deux hyperboloides, et, par conséquent, il est osculateur de la courbe K.

Je suppose qu'on ait construit, de cette manière, cinq plans osculateurs α, β, γ, δ, ε de K. Cela posé, on doit chercher, dans le plan P, une droite L telle, que le système de points $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ soit homographique au système $E(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Concevons la conique qui est tangente aux quatre droites $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et capable du rapport anharmonique $E(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; et concevons l'autre conique qui est tangente aux droites $P(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ et capable du rapport anharmonique $E(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$. Ces coniques, inscrites au même triangle formé par les droites $P(\alpha, \beta, \gamma)$, auront une quatrième tangente commune, qu'on sait construire, par la seule règle, sans recourir au tracé actuel des coniques. Cette quatrième tangente commune est évidemment la droite L qu'on demandait.

Observons, enfin, que les points $A(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, $B(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ forment deux divisions homographiques; donc les plans menés par ces points et par la droite L forment, autour de celle-ci, deux faisceaux homographiques. Les plans doubles de ces faisceaux sont les plans osculateurs de K qui résolvent le problème 6°.

Problème 7°. *Construire la cubique gauche qui s'appuie deux fois sur six droites données A, B, C, D, E, F.*

Je suppose d'abord qu'on demande de construire la cubique gauche appuiée sur les droites A, B, C, D, E et passant par un point quelconque o de F. Menons par o la droite qui s'appuie sur A, B; et la droite qui s'appuie

sur *C*, *D*; ces deux droites déterminent un plan *P*. Ce plan *P* contient une droite qui est l'intersection de deux plans tangens communs aux hyperboloides *ABE*, *CDE* (prob. 6e); ces deux plans tangens marquent sur *E* deux points de la cubique qui doit couper deux fois les cinq droites *A*, ... *E* et passer par *o*.

Si l'on fait varier *o* sur *F*, le plan *P* enveloppe la développable formée par les plans tangens communs aux hyperboloides *ABF*, *CDF*. Soit *H* la cubique gauche arête de rebroussement (courbe cuspidale) de cette développable; de même, soit *K* la cubique gauche osculée par les plans tangens communs aux hyperboloides *ABE*, *CDE*.

Cela posé, il faut trouver une droite *L* qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de *H* et de deux plans osculateurs de *K*. Ces derniers plans rencontrent *E* en deux points; les plans osculateurs de *H* déterminent sur *F* deux autres points. Ces quatre points appartiennent à la cubique gauche demandée dans le problème 7e.

La question: *trouver une droite qui soit l'intersection de deux plans osculateurs de H et de deux plans osculateurs de K* admet, en général, *dix* solutions. Mais ici il faut en rejeter quatre, qui répondent aux droites *A*, *B*, *C*, *D*. En effet, soit *o* l'un des points où la cubique demandée coupe la droite *F*; si le plan osculateur mené du point *o* à la courbe *H* devait contenir, par exemple, la droite *A*, il faudrait que *o* appartînt à l'hyperboloide *ACD*, et par conséquent il faudrait que cette surface passât par la cubique demandée. Ce qui est généralement impossible, car, si un hyperboloide doit passer par une cubique gauche et par *deux* cordes de cette courbe, l'hyperboloide est complètement déterminé: donc il ne contiendra pas une troisième corde donnée *à priori*. Et si les droites *A*, *C*, *D* appartenaient à un même hyperboloide passant par la cubique gauche, celle-ci devrait contenir les six points où l'hyperboloide est percé par les droites *B*, *E*, *F*; ce qui est encore impossible, car une cubique gauche située sur un hyperboloide donné *à priori* est déterminée par cinq points de cette surface.

Concluons donc que notre problème admet au plus *six* solutions.

J'ai affirmé qu'il y a *dix* droites, dont chacune est l'intersection de deux plans osculateurs de *H* et de deux plans osculateurs de *K*. Je justifierai à présent cette assertion; ou plutôt, je démontrerai le théorème corrélatif:

Deux cubiques gauches H, K qui n'ont pas de points communs, admettent dix cordes communes. (J'appelle *corde commune* toute droite qui coupe en deux points réels ou imaginaires chacune des deux cubiques.)

Supposons que la cubique gauche K soit le système d'une conique plane C et d'une droite R ayant un point commun avec C. Les cordes de la cubique gauche H qui rencontrent R forment une surface du quatrième ordre, pour laquelle R est une droite simple, et H est une courbe double (de striction). Cette surface est rencontrée par la conique C en sept points, en faisant abstraction du point où R s'appuie sur C. Donc il y a *sept* droites qui rencontrent deux fois H, une fois R et une fois C.

La cubique gauche H est coupée par le plan de C en trois points, qui joints deux à deux donnent trois cordes de H. Donc il y a *trois* droites qui rencontrent deux fois H et deux fois C.

Il y a donc *dix* droites qui rencontrent deux fois H et deux fois le système $C+R$. J'en conclus que le théorème est vrai aussi pour deux cubiques gauches, proprement dites, H, K.

Si les cubiques gauches H, K ont un point commun, il y a quatre cordes communes qui passent par ce point.

Si H, K ont deux points communs a, b la droite ab est une corde commune; en outre, par chacun de ces points passent trois cordes communes.

Si H, K ont trois points communs a, b, c les droites bc, ca, ab sont des cordes communes; en outre, par chacun de ces points passent deux cordes communes.

Enfin, si H, K ont quatre points communs, les six droites qui les joignent deux à deux sont des cordes communes; de plus, par chacun de ces points passe une quatrième corde commune. Les cubiques n'ont pas, en général, d'autres cordes communes. Mais s'il y avait encore une autre corde commune, il y en aurait un nombre infini, car dans ce cas les deux courbes gauches seraient situées sur la surface d'un même hyperboloide.

Concluons donc que, si deux cubiques gauches, non situées sur un même hyperboloide, ont 1, 2, 3, 4 points communs, il y a 6, 3, 1, 0 cordes communes qui ne passent pas par ces points.

On démontre aisément aussi le théorème général:

*Etant données deux courbes gauches des ordres m, m', avec a, a' points doubles apparens**), *respectivement, le nombre total des cordes communes à ces courbes est, en général,* $\frac{mm'(m-1)(m'-1)}{4}+aa'$. *Et si les courbes données ont r points communs, le nombre des cordes communes qui ne passent pas par ces points est* $\frac{(m-1)(m'-1)(mm'-4r)}{4}+aa'+\frac{r(r-1)}{2}$.

Bologne, le 24 juin 1861.

*) Si par un point quelconque dans l'espace on peut mener a droites qui rencontrent deux fois une courbe gauche donnée, on dit, d'après MM. *Cayley* et *Salmon*, que cette courbe a un nombre a de points doubles *apparens*.

Ueber das *Pfaff*sche Problem.

Erste Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Jacobi hat mehrfach darauf hingewiesen, dass die bisherige Methode, durch welche man das *Pfaff*sche Problem zu lösen pflegt, unnöthige Integrationen erfordere, und durch eine andere zu ersetzen sei; als ein Beispiel dieser neuen Methode ist der Fall eines viergliedrigen Differentialausdruckes im 29sten Bande dieses Journals p. 253 (Math. W. Th. I, p. 157) andeutungsweise behandelt worden. Aus jener Andeutung geht hervor, dass wenigstens die allgemeine Idee dieser Methode bereits damals *Jacobi* vor Augen gestanden habe.

Inzwischen ist weder in seinen späteren Publicationen noch in seinen nachgelassenen Papieren etwas über diesen Gegenstand vorhanden; und man darf daher wohl annehmen, dass *Jacobi* niemals Zeit oder Gelegenheit gewonnen habe, das gedachte Problem ausführlich und eingehend zu behandeln. Auch die grosse Abhandlung, welche in den vorangehenden Heften dieses Journals aus seinem Nachlasse erschienen ist, giebt nur in Bezug auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung jene neue Methode, welche die wahre Verallgemeinerung der Untersuchungen *Lagranges* enthält; nichts hingegen über das verwandte Problem, als dessen speciellen Fall *Pfaff* die Integration jener Gleichungen betrachten gelehrt hat. Indessen zeigt eine genauere Betrachtung, dass in der That die *Jacobi*sche Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen auf das *Pfaff*sche Problem ganz genau Anwendung findet, und zwar ohne Beschränkung oder Erweiterung der Kunstgriffe, welche bei dem ersteren Probleme zum Ziele führen.

Die Ausdehnung dieser Methode auf das *Pfaff*sche Problem in seiner ganzen Allgemeinheit und in allen seinen möglichen Fällen ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Diese Anwendung erscheint sofort als mög-

lich, sobald man die Idee festhält, dass ein Differentialausdruck von $2n$ Gliedern, der durch n Gleichungen integrirt wird, mit Hülfe irgend einer jener Gleichungen in einen anderen von $2n-1$ Gliedern übergeführt werden kann, welcher durch $n-1$ Gleichungen integrirbar ist; dieser durch eine dieser $n-1$ Gleichungen in einen dritten mit $2n-2$ Veränderlichen, der durch $n-2$ Gleichungen integrirt werden kann, u. s. w. Aber allerdings schien es zunächst der verwickelten Gleichungen wegen sehr schwierig, sich eine genaue Vorstellung aller dieser Vorgänge in ihrem Zusammenhange zu bilden, und die verschiedenen Gleichungen anzugeben, von welchen die successive zu findenden Integrale abhängen. Dieser Schwierigkeit wurde dadurch begegnet, dass man sich immer den gegebenen Differentialausdruck zuerst auf eine bestimmte Weise in die gesuchte Form gebracht denkt, sodann irgend eine andere Lösung der Aufgabe zunächst in dieser speciellen Form begründet, und von dieser erst wieder zu dem gegebenen Differentialausdruck zurückkehrt. Hiedurch ist man der Mühe überhoben, directe Nachweise zu führen, welche auf sehr verwickelte algebraische Betrachtungen führen, und allerdings ihrerseits ein hohes Interesse haben.

Es zeigt sich, dass die möglichen Fälle des *Pfaff*schen Problems sich in zwei grosse Klassen sondern, welche beide auf die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

führen, doch mit dem Unterschiede, dass in der ersten Klasse die Functionen F, f in gewisser Weise bestimmt sind, während in der zweiten eine derselben willkürlich gewählt werden kann; wie man denn das Problem im letzteren Falle auch dahin definiren kann, dass der gegebene Differentialausdruck die Gestalt

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots$$

annehmen soll. Die Probleme der ersten Klasse treten im Allgemeinen bei einer geraden, die der zweiten bei einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen ein.

Die §§. 1—7 geben die Integrationsmethode für die erste Klasse von Problemen; §§. 8—11 geben zwei verschiedene Methoden für die zweite Klasse, deren jede unter geeigneten Umständen Vorzüge besitzt. Diese Klasse von Problemen ist noch nie allgemein behandelt worden; und ist namentlich die erste dieser beiden Methoden durchaus auf ganz veränderte Anschauungen gegründet.

In diesen §§. sind die Wege angegeben, die Integrale des *Pfaff*schen Problems successive zu finden, und zwar so, dass jede gefundene Gleichung zur Transformation des Differentialausdruckes benutzt wird, ehe zur Aufsuchung der nächstfolgenden übergegangen wird.

In den folgenden §§. ist nur auf den Fall eingegangen, wo ein Ausdruck mit $2n$ Veränderlichen durch n Gleichungen integrirt wird. Aus der in den ersten Paragraphen gegebenen Methode wird ein sehr merkwürdiges System von Gleichungen entwickelt, $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen enthaltend, welches die n Integrale des *Pfaff*schen Problems *gleichzeitig* definirt, ohne also dass die Kenntniss eines Integrals zur Kenntniss der Gleichungen nothwendig ist, von denen das folgende abhängt. Diese $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen kommen auf zwei Formen zurück; die eine Form, welche n dieser Gleichungen zukommt und welche nur je eine der unbekannten Functionen enthält, entspricht dem ersten *Pfaff*schen System; die anderen $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen haben sämmtlich gleiche Form, und jede enthält zwei der gesuchten Functionen. Bezeichnet man also irgend zwei dieser Functionen durch H_i, H_k, so ist dies System durch lineare partielle Differentialgleichungen dargestellt, die man durch die Symbole

$$(H_i) = 0, \quad (H_k) = 0, \quad [H_i, H_k] = 0$$

ausdrücken kann.

Diese Gleichungen haben höchst interessante Eigenschaften. Denn vermöge gewisser identischer Beziehungen kann man das *Poisson-Jacobi*sche Theorem auf dieselben ausdehnen; es besitzt jede Gleichung

$$(\varphi) = 0$$

die Eigenschaft, dass aus irgend *drei* ihrer Lösungen im Allgemeinen die übrigen durch blosse Differentiation abgeleitet werden können; ebenso kann man, wenn in der Gleichung

$$[\varphi, \psi] = 0$$

ψ eine beliebig gegebene Function ist, aus zwei Integralen dieser Gleichung im Allgemeinen alle übrigen zusammensetzen: wie dies bei den dynamischen Gleichungen eintritt, welche als specieller Fall sowohl der ersten als der letzteren Gleichungen zu betrachten sind.

Ein Theil der hier mitgetheilten Resultate findet sich in der Abhandlung des Herrn *Natani*, dieses Journal Bd. 58, p. 301 etc. angebahnt. So ist namentlich

die Ausdehnung des *Poisson*schen Satzes im Keime dort enthalten, wenn auch in einer Form, welche das Wesen der Sache nicht vollkommen erkennen lässt, und nicht in der Ausdehnung, welche ihm im Folgenden gegeben ist. Ebenso findet man das *Jacobi*sche Princip, den gegebenen Differentialausdruck durch die gefundenen Integrale zu reduciren, dort angewandt. Da aber nicht gezeigt worden ist, wie man von den auftretenden *simultanen* Systemen partieller Differentialgleichungen *ein* Integral finden könne, so musste a. a. O. die Methode nothwendig ohne Abschluss bleiben. Da ausserdem die Art der Darstellung und die Natur der Beweise hier eine ganz andere ist wie in der Abhandlung des Herrn *Natani*, so schien es dem Verfasser angemessen, neben vielem Neuen auch dasjenige nicht zu übergehen, wofür sich dort Anknüpfungspunkte finden, um dadurch nicht der ganzen Darstellung Deutlichkeit und Zusammenhang zu rauben.

§. 1.

Zurückführung zweier Lösungen des *Pfaff*schen Problems auf einander.

Es sei

$$(1.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

der gegebene Differentialausdruck, in welchem $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ irgend welche Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ bedeuten. Das *Pfaff*sche Problem besteht darin, diesem Ausdruck die Gestalt zu geben:

$$(2.) \qquad F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

wo die F und f wiederum Functionen der x sind. Dies ist auf mehr als eine Art möglich; so aber dass die verschiedenen Lösungen des Problems aus einander abgeleitet werden können. Ich nehme an, ein Ausdruck (2.) sei gefunden; man soll zunächst aus diesem einen anderen bilden

$$(3.) \qquad \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n,$$

welcher jenem gleich wird, und also eine neue Lösung des Problems angiebt. Betrachtet man dann in der Gleichung

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n = \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

die F und f als die unabhängigen Veränderlichen, so löst sich diese Gleichung in die folgenden auf:

$$(4.) \qquad \begin{cases} F_i = \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Phi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Phi_n \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial f_i}, \\ 0 = \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \Phi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial F_i} + \cdots + \Phi_n \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial F_i}, \end{cases}$$

deren jede n verschiedene Gleichungen darstellt. Aus der letzten derselben folgt durch Elimination der Φ:

$$0 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_n},$$

oder durch Integration:

$$(5.) \qquad 0 = \Pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, f_1, f_2, \ldots f_n),$$

durch Π eine willkürliche Function bezeichnet. Die Differentiation dieser Gleichung nach F_i giebt dann

$$\Pi' \varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \Pi' \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_i} + \cdots + \Pi' \varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_i} = 0,$$

und die Vergleichung mit der zweiten Gleichung (4.) zeigt dann, dass

$$(6.) \qquad \Phi_1 = \lambda \Pi' \varphi_1, \quad \Phi_2 = \lambda \Pi' \varphi_2, \quad \ldots \quad \Phi_n = \lambda \Pi' \varphi_n,$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. Endlich giebt die erste Gleichung (4.) hienach sofort:

$$F_i = \lambda \left(\Pi' \varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Pi' \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Pi' \varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_i} \right),$$

oder weil nach (5.)

$$\Pi' \varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Pi' \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Pi' \varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_i} + \Pi' f_i = 0$$

wird:

$$(7.) \qquad F_1 = -\lambda \Pi' f_1, \quad F_2 = -\lambda \Pi' f_2, \quad \ldots \quad F_n = -\lambda \Pi' f_n.$$

Die Gleichungen (5.), (6.), (7.) stellen die allgemeinste Lösung des Problems dar, insofern die Gleichungen (5.), (7.) es gestatten, nachdem man einmal die willkürliche Function Π irgendwie bestimmt hat, die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \lambda$ durch die F, f auszudrücken. Die Gleichungen (6.) liefern dann die Φ ohne Weiteres.

Es könnte allgemeiner scheinen, wenn man nicht blos die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_n}$$

verschwinden liesse, sondern auch ihre Unterdeterminanten bis zu einer gewissen Ordnung. Dann würde man zwischen den φ und f nicht *eine* Gleichung, sondern eine gewisse Zahl von Gleichungen

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_\mu = 0$$

anzunehmen haben; und für die F, Φ würden sich dann die Ausdrücke ergeben:

$$\Phi_i = \lambda_1 \Pi_1' \varphi_i + \lambda_2 \Pi_2' \varphi_i + \cdots + \lambda_\mu \Pi_\mu' \varphi_i,$$
$$F_i = -\lambda_1 \Pi_1' f_i - \lambda_2 \Pi_2' f_i - \cdots - \lambda_\mu \Pi_\mu' f_i.$$

Aber in Wirklichkeit ist dies nur ein specieller Fall des vorigen; denn setzt man in dem früheren

$$\Pi = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \cdots + \lambda_\mu \Pi_\mu,$$

wo die λ Functionen der f, φ bedeuten, so wird

$$\Phi_i = \lambda_1 \Pi_1' \varphi_i + \lambda_2 \Pi_2' \varphi_i + \cdots + \lambda_\mu \Pi_\mu' \varphi_i + \Pi_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi_i} + \Pi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi_i} + \cdots + \Pi_\mu \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \varphi_i},$$

$$F_i = -\lambda_1 \Pi_1' f_i - \lambda_2 \Pi_2' f_i - \cdots - \lambda_\mu \Pi_\mu' f_i - \Pi_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial f_i} - \Pi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial f_i} - \cdots - \Pi_\mu \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial f_i}.$$

Nimmt man nun an, dass statt der Gleichung $\Pi = 0$ die Gleichungen

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_\mu = 0$$

gleichzeitig bestehen, so gehen diese Gleichungen in die obigen über, welche demnach aus dem ersten Fall abgeleitet sind.

Wenn man aus den Gleichungen (5.) und (7.) die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ und λ eliminirt, so gelangt man zuletzt zu einer Gleichung, der man die Form geben kann:

$$\varphi_n = \psi\left(f_1, f_2, \ldots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \ldots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right);$$

und zwar ist ψ eine ganz willkürliche Function, da Π oben eine willkürliche Function war.

Dies Resultat ist sehr bekannt. Da es aber als Grundlage des folgenden dienen wird, so schien es passend, dasselbe durch einfache Betrachtungen von Neuem abzuleiten.

Ich bemerke nur, dass eben diese Betrachtungen offenbar noch gelten, wenn zwischen den Functionen X solche Beziehungen obwalten, dass man dem Ausdruck (1.) die Gestalt geben kann:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m,$$

wo $m < n$. Auch dann wird in der allgemeinsten Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

dieses Ausdrucks die Function φ_m eine willkürliche Function der Grössen

$$f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

sein, welche einer speciellen Lösung angehören.

§. 2.

Successive Lösung des *Pfaff*schen Problems.

Liegt der Ausdruck (1.) vor, so wird man also zunächst den allgemeinsten Ausdruck von φ_n suchen können,

$$\varphi_n = \Pi\left(f_1, f_2, \dots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right).$$

Hat man aber einen besonderen Ausdruck dieser Art gefunden, dem ein specieller Werth von Π entspricht, so kann man

$$\varphi_n = \text{Const.}$$

als ein Integral des *Pfaff*schen Problems betrachten, und die Aufsuchung von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ dadurch anbahnen, dass man aus dem Ausdrucke (1.) eine der Veränderlichen eliminirt; wodurch denn dieser in einen Ausdruck mit $2n-1$ Veränderlichen übergeht, der aber die Eigenschaft besitzt, durch $n-1$ Gleichungen integrirt, d. h. in die Gestalt

$$(8.) \qquad F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}$$

gebracht werden zu können.

Um diese Eigenschaft, welche von der Wahl der zu eliminirenden Veränderlichen offenbar unabhängig sein muss, nachzuweisen, kann man von der speciellen Form (2.)

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_n df_n$$

ausgehen, welche gefunden gedacht wird. Setzt man sodann die Gleichung $\varphi_n = \text{Const.}$ in die Gestalt

$$f_n = \psi\left(f_1, f_2, \dots f_{n-1}, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right),$$

und führt diesen Werth von f_n in die Form (2.) ein, so erhält man:

$$F_n \left\{ \left(\frac{F_1}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_1}\right) df_1 + \left(\frac{F_2}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_2}\right) df_2 + \dots + \left(\frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_{n-1}}\right) df_n \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_1}{F_n}} \cdot d\frac{F_1}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_2}{F_n}} \cdot d\frac{F_2}{F_n} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_{n-1}}{F_n}} \cdot d\frac{F_{n-1}}{F_n} \right\}.$$

Diese Form enthält aber in der Klammer nur $2(n-1)$ Veränderliche

$$f_1, f_2, \dots f_{n-1}, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

und lässt sich daher nothwendig in der Form (8.) darstellen.

Diese Eigenschaft führt auf den Weg, den man zur einfachsten Lösung des *Pfaff*schen Problems einzuschlagen hat. Man denkt sich zunächst den gegebenen Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in die Gestalt gebracht:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

und sucht eine beliebige Function φ_n der Grössen

$$f_1, f_2, \cdots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \cdots \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

zu bestimmen. Eliminirt man dann mit Hülfe der Gleichung $\varphi_n = \text{Const.}$ aus dem gegebenen Ausdruck eine der Veränderlichen, so lässt sich der Rest in die Form

$$F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \cdots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}$$

überführen. Man sucht jetzt eine beliebige Function φ_{n-1} der Grössen

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \cdots f_{n-1}^{(1)}, \frac{F_1^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \frac{F_2^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \cdots \frac{F_{n-2}^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}$$

zu bestimmen, und eliminirt mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-1} = \text{Const.}$ wiederum eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, der alsdann noch $2n-2$ Veränderliche enthält, aber durch $n-2$ Gleichungen integrirbar wird, d. h. der sich auf die Form bringen lässt:

$$F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \cdots + F_{n-2}^{(2)} df_{n-2}^{(2)}.$$

Man sucht ferner eine Function φ_{n-2} der Grössen

$$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \cdots f_{n-2}^{(2)}, \frac{F_1^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}}, \frac{F_2^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}}, \cdots \frac{F_{n-3}^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}},$$

eliminirt mit Hülfe von $\varphi_{n-2} = \text{Const.}$ abermals eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, und fährt in dieser Weise fort, bis man in dem Ausdruck nur noch $n+1$ Veränderliche übrig behält. Den gegebenen Ausdruck, auf diese Weise reducirt, kann man sich dann immer in die Form gebracht denken

$$F_1^{(n-1)} df_1^{(n-1)};$$

sucht man nun eine beliebige Function φ_1 von $f_1^{(n-1)}$ zu bestimmen, so hat man eine Reihe von Functionen

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \cdots \quad \varphi_n,$$

welche, Constanten gleich gesetzt, die Integrale des vorliegenden Problems bilden, d. h. welche es erlauben, den gegebenen Ausdruck in der Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

darzustellen.

Denkt man sich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ gefunden, so sind während der soeben beschriebenen Operationen die Veränderlichen x in folgenden Beziehungen zu betrachten:

1. Aus $\varphi_n = \text{Const.}$, x_{2n} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}$.
2. Aus $\varphi_{n-1} = \text{Const.}$, x_{2n-1} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}$.
3. Aus $\varphi_{n-2} = \text{Const.}$, x_{2n-2} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}$.

u. s. w.

$n-1$. Aus $\varphi_2 = \text{Const.}$, x_{n+2} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Setzt man in diesem Sinne:

$$1.\quad X_i^{(1)} = X_i + \frac{\partial x_{2n}}{\partial x_i} X_{2n}, \qquad i = 1, 2, \ldots 2n-1,$$

$$2.\quad X_i^{(2)} = X_i^{(1)} + \frac{\partial x_{2n-1}}{\partial x_i} X_{2n-1}^{(1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots 2n-2,$$

$$3.\quad X_i^{(3)} = X_i^{(2)} + \frac{\partial x_{2n-2}}{\partial x_i} X_{2n-2}^{(2)}, \qquad i = 1, 2, \ldots 2n-3,$$

u. s. w.

$$n-1.\quad X_i^{(n-1)} = X_i^{(n-2)} + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_i} X_{n+2}^{(n-2)}, \quad i = 1, 2, \ldots n+1,$$

so hat man dem Vorgehenden gemäss, sich folgende identische Gleichungen zu denken:

$$(9.)\quad \begin{cases} X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n, \\ X_1^{(1)} dx_1 + X_2^{(1)} dx_2 + \cdots + X_{2n-1}^{(1)} dx_{2n-1} = F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \cdots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}, \\ X_1^{(2)} dx_1 + X_2^{(2)} dx_2 + \cdots + X_{2n-2}^{(2)} dx_{2n-2} = F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \cdots + F_{n-2}^{(2)} df_{n-2}^{(2)}, \\ \text{u. s. w.} \\ X_1^{(n-1)} dx_1 + X_2^{(n-1)} dx_2 + \cdots + X_{n+1}^{(n-1)} dx_{n+1} = F_1^{(n-1)} df_1^{(n-1)}, \end{cases}$$

und aus diesen identischen Gleichungen die Bestimmungsweise folgender Functionen aufzusuchen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi_n &= \Pi\left(f_1,\ f_2,\ \dots f_n,\ \dfrac{F_1}{F_n},\ \dfrac{F_2}{F_n},\ \dots \dfrac{F_{n-1}}{F_n}\right), \\ \varphi_{n-1} &= \Pi\left(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots f_{n-1}^{(1)}, \dfrac{F_1^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \dfrac{F_2^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \dots \dfrac{F_{n-1}^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1 &= \Pi(f_1^{(n-1)}). \end{cases}$$

Ich werde nun zeigen, wie dieselbe aus den Gleichungen (9.) einfach hervorgeht.

§. 3.

Partielle Differentialgleichung, der jedes einzelne Integral des *Pfaff*schen Problems genügt, in dem Falle, wo ein $2n$gliedriger Differential-Ausdruck sich in determinirter Weise auf einen $n$gliedrigen bringen lässt.

Um die zu befolgende Methode deutlicher ans Licht treten zu lassen, wird es gut sein, zunächst die Aufsuchung von φ_n besonders zu behandeln, welche auf das bekannte erste *Pfaff*sche System führt.

Wenn man in der ersten der Gleichungen (9.) die x als die unabhängigen Veränderlichen ansieht, so löst dasselbe sich in ein System auf, welches durch folgende Gleichung repräsentirt wird:

$$(11.)\quad X_i = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Aus dieser Gleichung aber ergiebt sich sofort folgende:

$$(12.)\quad \begin{cases} a_{ik} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \\ \qquad - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} - \dots - \dfrac{\partial F_n}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Man kann jetzt offenbar immer solche Grössen $z_1, z_2, \dots z_{2n}$ bestimmen, welche den Gleichungen genügen:

$$(13.)\quad \begin{cases} X_1 = \ * \ + a_{21}z_2 + a_{31}z_3 + \dots + a_{2n,1}z_{2n}, \\ X_2 = a_{12}z_1 + \ * \ + a_{32}z_3 + \dots + a_{2n,2}z_{2n}, \\ X_3 = a_{13}z_1 + a_{23}z_2 + \ * \ + \dots + a_{2n,3}z_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{2n} = a_{1,2n}z_1 + a_{2,2n}z_2 + a_{3,2n}z_3 + \dots \ * \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (11.), (12.) nehmen aber diese die Gestalt an:

$$\Sigma_h \left\{ \frac{\partial f_h}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h\right) - \frac{\partial F_h}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n}\right)\right\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt $2n$ verschiedene vor, welche in Bezug auf die $2n$ Ausdrücke

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h,$$
$$-\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n}\right)$$

linear sind und zwar so, dass die Determinante ihrer Coefficienten

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{2n}}$$

wird. Wenn also diese Determinante nicht verschwindet, so lösen sich die obigen $2n$ Gleichungen in die folgenden auf:

$$(14.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \dfrac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h = 0. \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \dfrac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} = 0. \end{cases}$$

Was die fragliche Determinante betrifft, so ist leicht zu entscheiden, ob sie verschwindet oder nicht. Denn man kann Δ auch in der Form darstellen:

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}\right) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}}\right) \cdots \left(-\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}\right).$$

Multiplicirt man diese Form mit der vorigen, so erhält man nach einem bekannten Satze, den bereits Herr *Brioschi* in dieser Art angewandt hat, eine Determinante, deren Elemente die Grössen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots - \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \cdots = a_{ik}$$

sind; so dass also

$$(15.) \quad \Delta^2 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{2n,2n}.$$

So ist das Verschwinden von Δ auf das Verschwinden einer bekannten Determinante zurückgeführt. Ich nehme vorerst an, dass dieselbe nicht verschwinde. Auf den entgegengesetzten Fall komme ich weiter unten zurück.

Es bestehen also die Gleichungen (14.). Aus der ersten derselben

folgt noch:

$$\frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_{2n}} z_{2n} = 0.$$

Dies, verbunden mit den Gleichungen (14.), zeigt, dass die Lösungen der Gleichung

$$z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} = 0$$

folgende sind:

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_n,\ \frac{F_1}{F_n},\ \frac{F_2}{F_n},\ \ldots\ \frac{F_{n-1}}{F_n};$$

mithin ist die gesuchte Function φ_n eine beliebige Lösung dieser Gleichung. Dieselbe führt, wie man unmittelbar sieht, auf das erste *Pfaff*sche System, indem hiernach φ_n ein beliebiges Integral des folgenden Systems vollständiger Differentialgleichungen ist:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{2n} = z_1 : z_2 : \ldots : z_{2n}.$$

§. 4.

Simultane partielle Differentialgleichungen, die in dem Falle auftreten, wo ein $p$gliedriger Differentialausdruck sich in determinirter Art auf einen $m$gliedrigen bringen lässt und $2m < p$ ist.

Ich werde jetzt eines der anderen Systeme (9.) betrachten; oder, allgemeiner, die Aufgabe behandeln, einen Ausdruck

$$(15.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p,$$

zwischen dessen Coefficienten die geeigneten Beziehungen stattfinden, auf die Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

zu bringen, wo $2m < p$. Es wird genügen, etwa die Function φ_m zu finden: denn ist dies gelungen, so kann man mit Hülfe der Gleichung

$$\varphi_m = \text{Const.}$$

etwa x_p eliminiren, und hat dann nach §. 2 die Aufgabe auf eine andere zurückgeführt, bei welcher sowohl p als m um Eins vermindert sind, welche aber eine ganz analoge Behandlung gestattet.

Denken wir uns den Ausdruck (15.) auf irgend eine Weise auf die Form

$$(16.) \qquad F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

gebracht, so ist φ_m eine beliebige Function von

$$f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m},$$

und es kommt nur darauf an, eine solche zu finden. Die Gleichsetzung der Ausdrücke (15.), (16.) führt aber zu folgenden Gleichungen:

$$(17.) \qquad X_i = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + F_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i},$$

wo i die Werthe 1, 2, ... p zu erhalten hat; und aus diesen folgt ferner:

$$(18.) \qquad \begin{cases} a_{ik} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} - \cdots - \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Seien jetzt $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ irgend $2m$ verschiedene Indices aus der Reihe 1, 2, ... p, und bestimmen wir $p-2m+1$ Grössenreihen

$$\begin{array}{llll} z_1, & z_2, & \ldots & z_{2m} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & \ldots & z_{2m}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(p-2m)}, & z_2^{(p-2m)}, & \ldots & z_{2m}^{(p-2m)}, \end{array}$$

so dass die erste Reihe den Gleichungen genügt:

$$(19.) \qquad \begin{cases} a_{1,k_1} z_1 + a_{2,k_1} z_2 + \cdots + a_{2m,k_1} z_{2m} = X_{k_1}, \\ a_{1,k_2} z_1 + a_{2,k_2} z_2 + \cdots + a_{2m,k_2} z_{2m} = X_{k_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1,k_{2m}} z_1 + a_{2,k_{2m}} z_2 + \cdots + a_{2m,k_{2m}} z_{2m} = X_{k_{2m}}; \end{cases}$$

jede der anderen Reihen, z. B.

$$z_1^{(h)}, \quad z_2^{(h)}, \quad \ldots \quad z_{2m}^{(h)},$$

aber einem Systeme folgender Art:

$$(20.) \qquad \begin{cases} a_{1,k_1} z_1^{(h)} + a_{2,k_1} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_1} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_1}, \\ a_{1,k_2} z_1^{(h)} + a_{2,k_2} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_2} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1,k_{2m}} z_1^{(h)} + a_{2,k_{2m}} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_{2m}} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_{2m}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (17.), (18.) verwandelt sich das erste dieser Systeme

in folgendes:

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2m} \Big[\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \Big(z_1 \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} \Big) - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \Big(z_1 \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}} + F_\lambda \Big) \Big],$$

wo dem Index k der Reihe nach die Werthe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ beigelegt werden müssen. Schliesst man nun, ganz wie im vorigen §., vorläufig den Fall aus, wo die Determinante

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{m+2}} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_{2m}}$$

verschwindet, so löst sich dieses System in die einfacheren Gleichungen auf:

$$z_1 \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} = 0,$$

$$z_1 \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}} + F_\lambda = 0.$$

Aus der letzteren folgt noch, dass auch

$$z_1 \frac{\partial \frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial \frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_{2m}} = 0;$$

und man sieht daher, dass der Gleichung

$$(21.) \qquad z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} = 0$$

die $2m-1$ Ausdrücke

$$f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

genügen; woraus weiter sich ergiebt, dass die allgemeine Lösung der Gleichung (21.) ist:

$$(22.) \qquad \varphi = \Pi\Big(f_1, f_2, \cdots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \cdots \frac{F_{m-1}}{F_m}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_p\Big).$$

In ganz ähnlicher Weise geht das System (20.) mit Hülfe der Gleichungen (17.), (18.) über in:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2m} \Big[\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \Big(z_1^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}} \Big) - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \Big(z_1^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}} \Big) \Big] = 0.$$

wo wieder h die Werthe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ erhalten muss. Und wenn Δ nicht

verschwindet, löst sich dieses System in das folgende auf:

$$z_1^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}}=0,$$

$$z_1^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}}=0.$$

Man erkennt hieraus, dass die Gleichung

$$(23.)\qquad z_1^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+h}}=0$$

erfüllt wird, wenn man für φ eine der Functionen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m$$

einsetzt, und dass also

$$(24.)\qquad \varphi=\psi'_h(f_1,f_2,\ldots f_m,F_1,F_2,\ldots F_m,x_{2m+1}\ldots x_{2m+h-1},x_{2m+h+1}\ldots x_p)$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (23.) ist.

Vergleicht man nunmehr die Gleichung (22.) mit den $p-2m$ Gleichungen, welche (24.) für die verschiedenen Werthe von h darstellt, so zeigt sich, dass es Functionen giebt, welche gleichzeitig unter alle diese Formen fallen, und also simultane Lösungen der Gleichungen (21.), (23.) sind. Dieselben dürfen wegen der Gleichungen (24.) die x nicht mehr explicite enthalten, da jede jener Gleichungen die Abwesenheit eines der x fordert, endlich aber können der Gleichung (22.) wegen nur die Verhältnisse der F darin vorkommen. Die allgemeinste simultane Lösung der Gleichungen (21.), (23.) ist also

$$\varphi=\Pi\left(f_1,f_2,\ldots f_m,\frac{F_1}{F_m},\frac{F_2}{F_m},\ldots\frac{F_{m-1}}{F_m}\right).$$

Dies aber ist genau die gesuchte Function, deren Kenntniss dazu dient, den vorliegenden Differentialausdruck auf die nächst einfachere Form zu reduciren. Man hat also nichts zu thun, als irgend eine simultane Lösung der Gleichungen (21.), (23.) zu suchen. Es entsteht die Frage, wie dies bewerkstelligt werden kann.

Ich bemerke zuvor, dass es offenbar gleichgültig sein muss, welche der Indices 1, 2, ... p man als k_1, k_2, ... k_{2m} zur Bildung der z verwendet; so wie dass es ganz gleichgültig ist, welche der Veränderlichen man durch die Indices 1, 2, ... $2m$ gewissermassen von den übrigen sondert. Dass dies wirklich so sein muss, liefert eben die Bedingungen, unter welchen der Ausdruck

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_pdx_p$$

in der Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

darstellbar ist. Es ist nach dem Vorhergehenden leicht, die übrigens bekannte Form dieser Bedingungen abzuleiten; was ich um so mehr übergehen kann, als die Aufstellung derselben für das Folgende ohne Bedeutung ist.

Im Vorigen ist der Fall ausgeschlossen, in welchem Δ verschwindet. Es ist leicht zu zeigen, wie man diese Bedingung auf eine zwischen den X stattfindende Bedingung zurückführt. Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ eine Reihe von $2m$ verschiedenen Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots p$, und setzt man

$$\Delta' = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_{m+1}}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{\alpha_{m+2}}} \cdots$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{\alpha_{m+1}}}\right) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{\alpha_{m+2}}}\right) \cdots,$$

so ist mit Hülfe der Gleichungen (18.) nach einem bekannten Determinantensatze:

$$\Delta\Delta' = \Sigma \pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{2m,\alpha_{2m}}.$$

Wenn also Δ verschwindet, so müssen alle Determinanten dieser Art verschwinden, bei denen eine Indicesreihe die Reihe

$$1. \quad 2. \quad \ldots \quad 2m$$

ist, während die andere Reihe

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{2m}$$

jede beliebige sein kann.

§. 5.

Eigenschaft der gefundenen simultanen partiellen linearen Differentialgleichungen.

Die Aufgabe besteht darin, eine simultane Lösung der Gleichungen

$$(25.) \quad \left\{ \begin{array}{l} A[\varphi] = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} = 0. \\ A^{(1)}[\varphi] = z_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+1}} = 0. \\ A^{(2)}[\varphi] = z_1^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+2}} = 0. \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A^{(p-2m)}[\varphi] = z_1^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = 0 \end{array} \right.$$

zu finden. Man weiss dabei im Voraus, dass es immer $2m$ solcher Functionen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m$$

giebt, mit deren Hülfe die allgemeinen Integrale der einzelnen vorliegenden Gleichungen bezüglich die folgenden Gestalten annehmen:

$$\varphi = \psi\Big(f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, x_p\Big),$$

$$\varphi = \psi_1(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, F_m, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, x_p),$$

$$\varphi = \psi_2(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, x_{2m+1}, F_m, \ldots x_{p-1}, x_p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi = \psi_{p-2m}(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, F_m).$$

Unter diesen Umständen liegt es nahe, die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ sich als bekannt vorzustellen, und sodann als unabhängige Veränderliche in den obigen Gleichungen die Grössen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m,\ x_{2m+1},\ x_{2m+2},\ \ldots\ x_p$$

einzuführen. Die vorstehenden $p-2m+1$ Ausdrücke von φ werden dann offenbar einzeln die allgemeinen Lösungen folgender partiellen Differentialgleichungen, in welchen die unter den Klammern ausgeführten Differentiationen sich auf die neue Wahl unabhängiger Veränderlichen beziehen:

$$0 = F_1\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\Big) + F_2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\Big) + \cdots + F_m\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\Big),$$

$$0 = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\Big) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_{2m+1}}\Big) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_{2m+1}}\Big) + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_{2m+1}}\Big),$$

$$0 = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\Big) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_{2m+2}}\Big) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_{2m+2}}\Big) + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_{2m+2}}\Big),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\Big) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_p}\Big) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_p}\Big) + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_p}\Big).$$

Diese Gleichungen müssen mit den oben angegebenen bis auf gewisse Factoren übereinstimmen; und man sieht auch, dass diese Factoren für die letzten $p-2m$ Gleichungen nur 1 sein können, da sowohl in der neuen als in der ersten Form die Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}, \ldots$ den Coefficienten 1 haben. Bezeichnet man für die erste Gleichung den unbekannten Factor, welcher beide Formen unterscheidet, durch μ, so hat man demnach folgende Gleichungen:

$$A[\varphi] = \mu\left(F_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\right)+F_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\right)+\cdots+F_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\right)\right),$$

$$A^{(1)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),$$

$$A^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{(p-2m)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right).$$

Bezeichnen wir jetzt durch

$$A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]]$$

denjenigen Ausdruck, welcher entsteht, indem man die Operation $A^{(i)}$ auf den Ausdruck $A^{(k)}[\varphi]$ anwendet, oder indem man in $A^{(i)}[\varphi]$ an die Stelle von φ den Ausdruck $A^{(k)}[\varphi]$ treten lässt, so erhält man Relationen, welche nothwendig von der Wahl der Veränderlichen unabhängig sind, und also auch für die ursprünglichen Formen jener Operationen gelten müssen. Sind i und k irgend welche der Indices $1, 2, \ldots p-2m$, so ist immer identisch:

$$(26.) \qquad A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]]-A^{(k)}[A^{(i)}[\varphi]] = 0.$$

Durch Verbindung der ersten Operation mit einer der anderen gewinnt man aber die identischen Gleichungen:

$$(27.) \qquad A[A^{(k)}[\varphi]]-A^{(k)}[A[\varphi]] = \left(\frac{\partial\log\mu}{\partial x_{2m+k}}\right).A[\varphi].$$

Obgleich diese Gleichungen bereits zur Begründung der folgenden Integrationsmethode hinreichen, so ist es doch zweckmässig, den wirklichen Werth des Factors μ aufzusuchen, was folgendermassen geschehen kann.

Bezeichnet man durch D die Determinante:

$$D = \Sigma\pm a_{1,k_1}\, a_{2,k_2}\ldots a_{2m,k_{2m}},$$

welche sich nach §. 4. in die beiden Factoren

$$J = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{m+2}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m}},$$

$$J' = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_{k_1}}\frac{\partial f_2}{\partial x_{k_2}}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{k_m}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{k_{m+1}}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{k_{m+2}}}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_{k_{2m}}},$$

auflöst, so ergiebt sich durch Auflösung der Gleichungen (19.)

$$D.z_k = X_{k_1}\frac{\partial D}{\partial a_{k,k_1}}+X_{k_2}\frac{\partial D}{\partial a_{k,k_2}}+\cdots+X_{k_{2m}}\frac{\partial D}{\partial a_{k,k_{2m}}};$$

oder indem man bemerkt, dass

$$X_k = \Sigma_\lambda F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k},$$

$$a_{h,k} = \Sigma_\sigma \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_k} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_h} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_k} \right)$$

zu setzen war:

$$\Delta\Delta' . z_h = \Sigma_i \Sigma_\lambda \Sigma_\sigma F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \left(\frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{k_i}}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_h}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{k_i}}} \right),$$

wo die erste Summe von $i = 0$ bis $i = 2m$, die anderen beiden von 1 bis m zu nehmen sind. Es ist aber

$$\Sigma_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{k_i}}}$$

unter allen Umständen gleich Null; und

$$\Sigma_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{k_i}}}$$

nur von Null verschieden, wenn $\lambda = \sigma$ ist, und in diesem Falle ist es gleich Δ'. Die obige Gleichung nimmt also mit Uebergehung des Factors Δ' die Gestalt an:

$$\Delta . z_h = -\Sigma_\lambda F_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

aus welcher beiläufig die willkürliche Indicesreihe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ ganz verschwunden ist.

Betrachtet man nun, wie oben geschehen ist, die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2m}$ als Functionen von $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$, und schliesst die in diesem Sinne genommenen Differentialquotienten in Klammern, so wird bekanntlich:

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial F_\lambda} \right) = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

und daher ist

$$z_h = -\left(F_1 \left(\frac{\partial x_h}{\partial F_1} \right) + F_2 \left(\frac{\partial x_h}{\partial F_2} \right) + \cdots + F_m \left(\frac{\partial x_h}{\partial F_m} \right) \right).$$

Bildet man also jetzt den Ausdruck $A[\varphi]$, so kommt:

$$A[\varphi] = z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}$$
$$= -\left\{F_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\right) + F_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\right) + \cdots + F_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\right)\right\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der im Vorigen unbestimmt gelassene Factor μ den Werth -1 hat; und demnach geht die Gleichung (27.) in die einfachere Gestalt über:

$$(28.) \qquad A[A^{(k)}[\varphi]] - A^{(k)}[A[\varphi]] = 0,$$

eine Beziehung, welche sich den Gleichungen (26.) vollkommen anschliesst.

§. 6.

Integration der gefundenen simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Jacobi hat den Weg angegeben, auf welchem man ein gemeinsames Integral eines Systems von Gleichungen

$$A[\varphi] = 0, \quad A^{(1)}[\varphi] = 0, \quad A^{(2)}[\varphi] = 0, \quad \ldots$$

aufzusuchen hat, sobald dieselben den Gleichungen (26.), (28.) genügen, sobald es also nicht möglich ist, aus denselben durch Differentiation neue Differentialgleichungen erster Ordnung abzuleiten.

Zu diesem Ende sucht man zuerst ein Integral irgend einer dieser Gleichungen auf. Ich will annehmen, man kenne ein Integral ψ der Gleichung

$$A[\varphi] = 0.$$

Diese Gleichung wird sich im vorliegenden Falle immer deswegen zur Untersuchung empfehlen, weil sie nur auf ein System von $2m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen führt, während jede der anderen auf $2m$ Gleichungen führt. Man kann sagen, dass ψ ein Integral einer Gleichung $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt, auf welche man jenes System zurückführen kann.

Da auf diese Weise identisch

$$A[\psi] = 0,$$

so folgt aus (28.), dass auch:

$$A[A^{(1)}[\psi]] = 0,$$

d. h. wenn ψ eine Lösung der Gleichung $A[\varphi] = 0$ ist, so ist auch $A^{(1)}[\psi]$ eine solche; mithin auch $A^{(1)}[A^{(1)}[\psi]]$, etc. Setzen wir der Kürze wegen

$$A^{(1)}[\psi] = \psi',$$
$$A^{(1)}[\psi'] = \psi'', \quad \text{etc.}$$

Da es unmöglich mehr als $2m-1$ von einander unabhängige Lösungen der

Gleichung $A[\varphi]=0$ geben kann, so führt die Fortsetzung dieser Operationen unfehlbar auf eine Function $\psi^{(\mu)}$, welche sich als Function der vorhergehenden darstellen lässt, so dass

$$\psi^{(\mu)} = \Pi(\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}),$$

wo Π zwar noch x_{2m+1}, x_{2m+2}, $\dots$ x_p, aber nicht mehr x_1, x_2, $\dots$ x_{2m} enthalten darf; und zwar ist μ höchstens gleich $2m-1$, kann aber ebensowohl kleiner sein.

Man kann jetzt untersuchen, ob es eine Function φ von ψ, ψ', $\dots$ $\psi^{(\mu-1)}$ giebt, welche zugleich die Gleichung $A^{(1)}[\varphi]$ befriedigt; dieselbe kann noch x_{2m+1}, x_{2m+2}, $\dots$ x_p enthalten, aber x_1, x_2, $\dots$ x_{2m} sollen explicite nicht mehr darin vorkommen. Ist φ eine solche Function, so wird

$$0 = A^{(1)}[\varphi]$$

$$\begin{aligned}
&= z_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + z_2^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dots + z_{2m}^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\\
&= z_1^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_1} + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_1}\right)\\
&+ z_2^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_2} + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_2}\right)\\
&\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ z_{2m}^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_{2m}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_{2m}} + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_{2m}}\right)\\
&+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_{2m+1}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_{2m+1}} + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_{2m+1}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),
\end{aligned}$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Differentialquotienten sich auf die Vorstellung beziehen, nach welcher φ als Function von ψ, ψ', $\dots$ $\psi^{(\mu-1)}$, x_{2m+1}, x_{2m+2}, $\dots$ x_p betrachtet wird. Nach der Definition der ψ giebt aber Obiges sogleich

$$\begin{aligned}
0 = A^{(1)}[\varphi] &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\psi' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\psi'' + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\psi^{(\mu)} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right)\\
&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\psi' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\psi'' + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\Pi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right).
\end{aligned}$$

Da in den Coefficienten dieser Gleichung die Grössen x_1, x_2, $\dots$ x_{2m} explicite nicht mehr vorkommen, so giebt es wirklich eine Function φ der verlangten Art, und dieselbe ist dann eine simultane Lösung der ersten beiden Gleichungen (25.). Die obige Gleichung aber ergiebt φ als Integral des Systems von μ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\psi}{dx_{2m+1}} = \psi', \quad \frac{d\psi'}{dx_{2m+1}} = \psi'', \quad \dots \quad \frac{d\psi^{(\mu-1)}}{dx_{2m+1}} = \Pi(\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}, x_{2m+1}, \dots),$$

oder der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx_{2m+1}} = \Pi\Big(\psi, \frac{d\psi}{dx_{2m+1}}, \frac{d^2\psi}{dx_{2m+1}^2}, \cdots \frac{d^{(\mu-1)}\psi}{dx_{2m+1}^{\mu-1}}, x_{2m+1}, \ldots\Big).$$

Ist ein Integral dieser Gleichung:

$$\Omega\Big(\psi, \frac{d\psi}{dx_{2m+1}}, \frac{d^2\psi}{dx_{2m+1}^2}, \cdots \frac{d^{(\mu-1)}\psi}{dx_{2m+1}^{\mu-1}}, x_{2m+1}, \ldots\Big) = \text{Const.},$$

so ist

$$\varphi = \Omega(\psi, \psi', \psi'', \ldots \psi^{(\mu-1)}, x_{2m+1}, \ldots)$$

die gesuchte simultane Lösung der ersten beiden Gleichungen (25.).

Betrachtet man insbesondere diese Function als Lösung der ersten Gleichung (25.), so kann man offenbar aus derselben auf ganz dem nämlichen Wege, wie hier eine simultane Lösung der ersten und zweiten gefunden wurde, eine simultane Lösung der ersten und dritten finden, welche der zweiten Gleichung dann ebenfalls genügen wird. Und so kann man allmälig zu einer Function aufsteigen, welche auch noch der dritten, vierten, etc. der Gleichungen (25.) genügt, und endlich zu der gesuchten simultanen Lösung aller, wodurch denn die Aufgabe erledigt ist. Man hat dabei der Reihe nach $p-2m$ Hülfsgleichungen aufzustellen, deren Grad den $(2m-1)^{\text{ten}}$ niemals übersteigt, und *ein* Integral einer jeden zu suchen. Da zunächst die Kenntniss eines Integrals der ersten Gleichung erforderlich war, welches ebenfalls von einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung abhängt, so bedarf man im ungünstigsten Falle je eines Integrals von $p-2m+1$ Differentialgleichungen $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, um die Function φ in vorgeschriebener Weise angeben zu können.

§. 7.

Zusammenstellung der zur gegebenen Lösung nöthigen Operationen.

Die auf diese Weise gewonnene Lösung des *Pfaff*schen Problems ist demnach folgende. Ist

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

der gegebene Ausdruck, so bilde man zunächst das in §. 3 angegebene System, welches einer Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht. Ein Integral derselben sei

$$\varphi_n = \text{Const.}.$$

Eliminirt man sodann x_{2n} mit Hülfe dieser Gleichung aus dem gegebenen

Ausdruck, so geht derselbe etwa über in:

$$X_1^{(1)}dx_1+X_2^{(1)}dx_2+\cdots+X_{2n-1}^{(1)}dx_{2n-1}.$$

Indem man auf diesen Ausdruck die Methode der §§. 5., 6. anwendet, wo $m=n-1$, $p=2n-1$ zu setzen ist, gelangt man zu einer Function φ_{n-1}, welche gleichzeitig 2 partiellen Differentialgleichungen genügt, und zu deren Aufstellung man je ein Integral von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen kennen muss, von welchen eine von der $(2n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, die andere von gleicher oder niedrigerer Ordnung ist.

Mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-1}=\text{Const.}$ eliminirt man jetzt x_{2n-1} aus dem bereits reducirten Ausdruck, wodurch derselbe in

$$X_1^{(2)}dx_1+X_2^{(2)}dx_2+\cdots+X_{2n-2}^{(2)}dx_{2n-2}$$

übergehe. Setzt man in der Methode der §§. 5., 6. $m=n-2$, $p=2n-2$, so findet man zu diesem Ausdruck eine Function φ_{n-2}, mit Hülfe je eines Integrals von 3 Gleichungen, welche höchstens bis zur $(2n-5)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigen. Mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-2}=\text{Const.}$ eliminirt man x_{2n-2} u. s. w. So gelangt man endlich zu einem Ausdruck:

$$X_1^{(n-1)}dx_1+X_2^{(n-1)}dx_2+\cdots+X_{n+1}^{(n-1)}dx_{n+1}.$$

Indem man auf diesen Ausdruck die Methode der §§. 5., 6. anwendet, hat man $p=n+1$, $m=1$ zu setzen. Es findet sich dann eine Function φ_1, welche gleichzeitig n verschiedenen partiellen Differentialgleichungen genügt, und durch Integration von ebensoviel einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gewonnen wird.

Die Gleichungen

$$\varphi_n=\text{Const.},\quad \varphi_{n-1}=\text{Const.},\quad \ldots\quad \varphi=\text{Const.}$$

geben dann eine Lösung des *Pfaff*schen Problems. Im ungünstigsten Falle bedarf man zur Auffindung derselben die Kenntniss je eines Integrals von

1	Differentialgleichung		$(2n-1)^{\text{ter}}$	Ordnung,
2	–	–	$(2n-3)^{\text{ter}}$	–
3	–	–	$(2n-5)^{\text{ter}}$	–
.	.	.	.	.
n	–	–	1ter	– .

Die gewöhnliche Auflösung des *Pfaff*schen Problems fordert die vollständige Integration von je einem System der $(2n-1)^{\text{ten}}$, $(2n-3)^{\text{ten}}$, ... 1ten Ordnung;

oder wenn man will, die Kenntniss je eines Integrals von

1	Differentialgleichung		$(2n-1)^{\text{ter}}$	Ordnung
1	-	-	$(2n-2)^{\text{ter}}$	-
2	-	-	$(2n-3)^{\text{ter}}$	-
2	-	-	$(2n-4)^{\text{ter}}$	-
. . . . .				
$n-1$	-	-	3ter	-
$n-1$	-	-	2ter	-
n	-	-	1ter	- .

Man bemerkt, dass durch die vorliegende Methode die einmalige Integration sämmtlicher Differentialgleichungen gerader Ordnung erspart wird; wozu ausserdem der Umstand tritt, dass die übrigen Integrationen, welche in beiden Fällen von gleicher Zahl sind, nur im ungünstigsten Falle bis zu den angegebenen Ordnungen aufsteigen, sehr oft aber grossentheils von viel niedrigeren Ordnungen sein werden.

Wenn zwischen den Coefficienten des gegebenen Differentialausdrucks solche Relationen stattfinden, dass er durch $n-k$ Gleichungen integrirt werden kann, so ist der Verlauf folgender. Man wendet sogleich auf den gegebenen Ausdruck die Methode der §§. 5. und 6. an, indem $p=2n$, $m=n-k$ gesetzt wird, und findet ein Integral

$$\varphi_{n-k} = \text{Const.}$$

durch je einmalige Integration von $2k+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen der $2(n-k)-1^{\text{ten}}$ Ordnung (höchstens). Eliminirt man sodann mit Hülfe dieser Gleichung x_{2n} aus dem gegebenen Differentialausdruck, so erhält man ein zweites Integral $\varphi_{n-k-1} = \text{Const.}$, indem man in §§. 5. und 6. $p=2m-1$, $m=n-k-1$ setzt, durch je einmalige Integration von $2k+3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen $2(n-k)-3^{\text{ter}}$ Ordnung, etc. So fordert die Aufgabe je ein Integral von

$2k+1$	Differentialgleichungen	$[2(n-k)-1]^{\text{ter}}$	Ordnung
$2k+2$	-	$[2(n-k)-3]^{\text{ter}}$	-
$2k+3$	-	$[2(n-k)-5]^{\text{ter}}$	-
. . . . .			
$k+n$	-	1ter	- .

§. 8.

Indeterminirter Fall des *Pfaff*schen Problems.

Es bleibt übrig, diejenigen Fälle zu untersuchen, welche im Vorhergehenden ausgeschlossen wurden. Diese Fälle sind nur scheinbar oben als Ausnahmsfälle aufgetreten. Dieselben bilden in Wirklichkeit eine besondere Klasse, welche von gleicher Allgemeinheit ist, wie die im Vorigen behandelte, und zwar so, dass bei einer geraden Anzahl von Veränderlichen im Allgemeinen der oben behandelte Fall, bei einer ungeraden Anzahl der andere auftreten wird. Diese zweite Klasse von Problemen, welcher bisher nur geringe Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, fordert eine ganz andere Behandlung wie die vorhergehende. Indem ich den analogen Gang einschlage, werde ich zunächst den gegebenen Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

auf irgend eine besondere Weise in die Form

$$F df + F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m$$

gebracht denken; und ich nehme an, dass es nicht möglich sei, den Ausdruck in einen anderen zu verwandeln, welcher eine geringere Anzahl von Termen enthielte; wobei denn jedenfalls $p \geqq 2(m+1)$. Es soll die allgemeinste ähnliche Form gefunden werden, welche dieser Ausdruck annehmen kann.

Die Bedingung, welche zum Unterschied gegen die früheren Fälle hier eintreten soll, besteht darin, dass die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{\partial F_1}{\partial x_\varrho} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_\tau}$$

unter allen Umständen verschwinden soll, welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots p$ man auch an Stelle der Indices $\alpha, \beta, \ldots \tau$ treten lässt. Denn giebt es nur eine einzige derartige Combination, für welche die Determinante *nicht* verschwindet, so kann man immer die Methode des §. 4. anwenden, indem man die beiden dort benutzten Indicesreihen, mit der in Rede stehenden zusammenfallen lässt. Verschwinden aber alle Determinanten, so existirt zwischen den $2m+2$ Functionen

$$f, f_1, \ldots f_m, F, F_1, \ldots F_m,$$

eine Relation, welche keine der Grössen x mehr explicite enthält.

Hingegen darf es niemals vorkommen, dass sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung der angeführten Determinanten verschwinden. Denn alsdann würden zwei dergleichen Relationen bestehen; man könnte etwa f und F durch die übrigen Functionen ausdrücken, und demnach auch den gegebenen Ausdruck in einen anderen verwandeln, der nur m Glieder enthält. Dies ist der gemachten Voraussetzung entgegen.

Das Verschwinden der angegebenen Determinanten ist aequivalent damit, dass in dem System

$$\begin{array}{ccccc} 0 & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \cdots & a_{p2} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & a_{p3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \cdots & 0 \end{array}$$

sämmtliche Unterdeterminanten gleich Null sind, welche aus $(2m+2)^2$ Elementen zusammengesetzt werden. Denn nach §. 4. ist jede solche Unterdeterminante entweder das Quadrat einer der erstgedachten Determinanten oder das Product von zweien derselben. Hingegen führt das Product von zweien ihrer Unterdeterminanten erster Ordnung immer auf eine Unterdeterminante des obigen Systems, welche nur aus $(2m+1)^2$ Elementen zusammengesetzt ist. Es würden daher *niemals* diese letzteren Unterdeterminanten *sämmtlich* verschwinden dürfen.

Man kann sich also den gegebenen Ausdruck in die Form

$$F df + F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m$$

gebracht denken, wo zwischen den Grössen F, f eine, und nicht mehr als eine, Beziehung besteht. Auch muss diese Beziehung jedenfalls eine der Functionen F enthalten, da sonst der Ausdruck sich in einen $m$gliedrigen würde überführen lassen. Sei also die gegebene Beziehung:

$$F = \Psi(f, f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m).$$

Die allgemeinste Form, welche jener Ausdruck annehmen kann, sei

$$\Phi d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m.$$

Betrachtet man nun als unabhängige Veränderliche f, f_1, f_2, $\ldots$ f_m, F_1, F_2, $\ldots$ F_m, x_{2m+2}, $\ldots$ x_p, so giebt die Gleichsetzung beider Formen folgende Gleichungen:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} \Psi = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial f} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial f} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial f}, \\ F_1 = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial f_1} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial f_1} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial f_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial f_m} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial f_m} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial f_m}, \end{cases}$$

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} 0 = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial F_1} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_1} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial F_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial F_m} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial F_m} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial F_m}, \end{cases}$$

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} 0 = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{2m+2}} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_{2m+2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial x_p} + \Phi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_p} + \cdots + \Phi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_p}. \end{cases}$$

Durch Combination der Systeme (II.), (III.) erhält man verschiedene Functionaldeterminanten, welche verschwinden müssen, und welche ausdrücken, dass eine Relation existire von der Form:

$$\Pi(f, f_1, f_2, \cdots f_m, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m) = 0,$$

durch Π eine willkürliche Function bezeichnet. Dann aber ergiebt sich:

$$\Phi = \lambda\Pi'\varphi, \quad \Phi_1 = \lambda\Pi'\varphi_1, \quad \ldots \quad \Phi_m = \lambda\Pi'\varphi_m;$$

und aus den Gleichungen (I.):

$$\Psi = -\lambda\Pi' f, \quad F_1 = -\lambda\Pi' f_1, \quad \ldots \quad F_m = -\lambda\Pi' f_m.$$

Der Fall, wo statt der Gleichung $\Pi = 0$ mehrere ähnliche Gleichungen neben einander bestehen, lässt sich leicht beseitigen, wie in §. 1.

Aus den vorliegenden Gleichungen ergiebt sich, dass, wie auch über die willkürliche Function Π verfügt werden mag, jedenfalls φ, φ_1, $\ldots$ φ_m, Φ, Φ_1, $\ldots$ Φ_m Functionen der f und F allein werden, ohne noch die x zu enthalten; und dass ferner, da Π noch beliebig war, für eine derselben jede beliebige Function von

$$f, f_1, \ldots f_m, F_1, \ldots F_m$$

gesetzt werden könne.

Unter den speciellen Formen wird man daher eine solche wählen können, für welche der Coefficient *eines* Differentials gleich 1 wird, oder

die Form:

$$(29.) \qquad df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m.$$

Diese Form werde ich im Folgenden zu Grunde legen; und, indem ich mir den gegebenen Ausdruck in diese Form gebracht denke, die Functionen Φ und φ aufsuchen, durch welche derselbe auf allgemeinste Weise in die Form

$$(30.) \qquad d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

übergehen kann. Die oben angegebenen Gleichungen für den Zusammenhang der allgemeinen mit der speciellen Form sind dann, da Φ und Ψ gleich 1 gesetzt sind:

$$\Pi(f, f_1, f_2, \ldots f_m, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = 0,$$
$$1 = \lambda\Pi'\varphi, \quad \Phi_1 = \lambda\Pi'\varphi_1, \quad \ldots \quad \Phi_m = \lambda\Pi'\varphi_m,$$
$$1 = -\lambda\Pi'f, \quad F_1 = -\lambda\Pi'f_1, \quad \ldots \quad F_m = -\lambda\Pi'f_m.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich noch die Beziehung

$$\Pi'\varphi + \Pi'f = 0,$$

d. h. in Π dürfen die Functionen f und φ nur in der Verbindung $\varphi - f$ vorkommen; und alsdann kann man jene Gleichungen durch folgendes System ersetzen:

$$\Pi(\varphi - f, f_1, f_2, \ldots f_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{\Pi'\varphi_1}{\Pi'(\varphi - f)}, \quad \Phi_2 = \frac{\Pi'\varphi_2}{\Pi'(\varphi - f)}, \quad \ldots \quad \Phi_m = \frac{\Pi'\varphi_m}{\Pi'(\varphi - f)},$$

$$F_1 = -\frac{\Pi'f_1}{\Pi'(\varphi - f)}, \quad F_2 = -\frac{\Pi'f_2}{\Pi'(\varphi - f)}, \quad \ldots \quad F_m = -\frac{\Pi'f_m}{\Pi'(\varphi - f)}.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen $\varphi - f$, φ_1, φ_2, $\ldots$ φ_{m-1}, Φ_1, Φ_2, $\ldots$ Φ_m eliminirt, so bleibt eine Beziehung zwischen φ_m, f_1, f_2, $\ldots$ f_m, F_1, F_2, $\ldots$ F_m übrig, welche vollkommen willkürlich ist, da Π ganz willkürlich sein konnte. *Der allgemeinste Werth von φ_m ist also eine willkürliche Function von f_1, f_2, $\ldots$ f_m, F_1, F_2, $\ldots$ F_m.* Auf diese Eigenschaft lässt sich die neue Methode der Behandlung des vorliegenden Problems gründen.

Denn ist etwa eine Function

$$\varphi_m = \Pi(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m)$$

gefunden, und eliminirt man mit Hülfe der Gleichung $\varphi_m = \text{Const.}$ oder

$$F_m = \Psi(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1})$$

eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, so geht derselbe in einen anderen über, welcher nur $p-1$ Veränderliche enthält, und die Form

$$df^{(1)} + F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \cdots + F_{m-1}^{(1)} df_{m-1}^{(1)}$$

annehmen kann. Sucht man daher wieder eine beliebige Function

$$\varphi_{m-1} = \Pi_1(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots f_{m-1}^{(1)}, F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots F_{m-1}^{(1)}),$$

und eliminirt mit Hülfe der Gleichung

$$\varphi_{m-1} = \text{Const.}$$

aufs Neue aus dem schon einmal transformirten Ausdruck eine der Veränderlichen, so erhält man einen Ausdruck mit $p-2$ Veränderlichen, welcher die Gestalt

$$df^{(2)} + F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \dots + F_{m-2}^{(2)} df_{m-2}^{(2)}$$

annehmen kann, u. s. w. Auf diese Weise gelangt man endlich zu einem Ausdruck von nicht mehr als $p-m$ Veränderlichen, welcher ein vollständiges Differential ist, und, gleich Null gesetzt, durch eine blosse Quadratur

$$\varphi = \text{Const.}$$

giebt. Die $m+1$ Gleichungen

$$\varphi_m = \text{Const.}, \quad \varphi_{m-1} = \text{Const.}, \quad \dots \quad \varphi = \text{Const.}$$

sind dann die Integralgleichungen des Problems.

Um die oben angeführte Eigenschaft nachzuweisen, welche von der Wahl der Veränderlichen unabhängig sein muss, betrachte ich den vorgelegten Differentialausdruck in der Form

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_m df_m,$$

und eliminire f_m mit Hülfe der Gleichung

$$F_m = \psi(f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_{m-1}).$$

Der Ausdruck

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_m df_m$$

enthält dann nur $2m-1$ Veränderliche, und kann also nach dem Vorigen die Gestalt annehmen:

$$d\vartheta + F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{m-1}^{(1)} df_{m-1}^{(1)}.$$

Setzt man also jetzt

$$f^{(1)} = f + \vartheta,$$

so geht der gegebene Differentialausdruck in

$$df^{(1)} + F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{m-1}^{(1)} df_{m-1}^{(1)}$$

über, was zu beweisen war.

§. 9.

Erste Methode zur Lösung des indeterminirten Falles. Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für die Integrale.

Um also das vorliegende Problem, dem Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

die Gestalt

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

zu geben, vollständig lösen zu können, ist es nur nöthig zu zeigen, wie man aus dem vorgelegten Ausdruck im Stande sei, eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ zu finden. Zu diesem Zweck kann man zunächst aus der Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke die Gleichungen bilden:

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}.$$

Aus dieser Gleichung folgt sogleich die andere:

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \right),$$

aus welcher, wie man sieht, die Function f gänzlich verschwunden ist.

Bestimmt man jetzt $2m$ Grössen $z_1^{(h)}, z_2^{(h)}, \ldots z_{2m}^{(h)}$ so, dass man, durch $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ irgend welche der Indices $1, 2, \ldots p$ angedeutet, die Gleichungen hat:

$$(31.) \quad \begin{cases} a_{1,k_1} z_1^{(h)} + a_{2,k_1} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_1} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_1}, \\ a_{1,k_2} z_1^{(h)} + a_{2,k_2} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_2} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,k_{2m}} z_1^{(h)} + a_{2,k_{2m}} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_{2m}} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_{2m}}, \end{cases}$$

so leitet man, indem man für die a_{ik} ihre obigen Werthe einsetzt, genau wie in §. 4 die Gleichungen ab:

$$z_1^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0,$$

$$z_1^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0,$$

welche für alle Werthe von λ gelten. Hieraus geht hervor, dass die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(32.) \quad A^{(h)}[\varphi] = z_1^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+h}} = 0$$

eine beliebige Function von $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$, so wie von $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_p$ ist, unter den letzteren allein x_{2m+h} ausgeschlossen. Setzt man daher für h der Reihe nach $1, 2, \ldots p-2m$, so erhält man aus (32.) $p-2m$ verschiedene Gleichungen, welche eine gemeinsame Lösung zulassen, nämlich

$$\varphi = \Pi(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m).$$

Dies ist aber gerade eine Function, wie sie oben gesucht wurde. Die Aufgabe ist daher auf die Aufsuchung einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (32.) zurückgeführt.

Es mag bemerkt werden, dass immer durch passende Wahl der Indices $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ und indem man für $x_1, x_2, \ldots x_{2m}$ unter den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_p$ geeignete auswählt, ein solches System (31.) gebildet werden kann, dessen Determinante nicht verschwindet. Denn der Fall, in welchem sämmtliche derartige Determinanten verschwinden, ist oben besonders ausgenommen worden, und gehört nicht hierher, sondern in die *erste* Klasse von Problemen. Wenn man in den Gleichungen (32.) $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_p$ als unabhängige Veränderliche einführt, so gehen dieselben über in:

$$A^{(1)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),$$

$$A^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A^{(p-2m)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right).$$

Aus diesen Gleichungen geht die identische Gleichung

$$A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]] = A^{(k)}[A^{(i)}[\varphi]]$$

hervor, und man kann somit zur Auffindung der simultanen Lösung dieses Systems die Methode des §. 6 benutzen. Aber jede dieser Gleichungen führt einzeln auf eine Differentialgleichung $2m^{\text{ter}}$ Ordnung; mithin werden auch, wenn ein Integral einer dieser Gleichungen bekannt ist, die dort erforderlichen Hülfsgleichungen von eben dieser Ordnung sein können; und man bedarf also zur Auffindung der simultanen Lösung je ein Integral von $p-2m$ Gleichungen, welche im ungünstigsten Falle sämmtlich von der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung sind.

Man kann nunmehr den Gang der Operationen für das Problem angeben. Es soll möglich sein, den Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

in die Form

$$d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

zu bringen. Man findet zunächst φ_m, sobald man je ein Integral von $p-2m$ Differentialgleichungen $2m^{\text{ter}}$ Ordnung angeben kann. Hat man dann mit Hülfe der Gleichung $\varphi_m = \text{Const.}$ eine der Veränderlichen aus dem vorgelegten Differentialausdruck eliminirt, so behandelt man den resultirenden ganz ähnlich, und findet φ_{m-1}, sobald man je ein Integral von $p-2m+2$ Differentialgleichungen $2m-2^{\text{ter}}$ Ordnung kennt, u. s. w. Zuletzt gelangt man zu einem Ausdruck von $p-m$ Gliedern, welcher die Integration gestattet. Die Auflösung des ganzen Problems erfordert also im ungünstigsten Falle die Kenntniss je eines Integrals von

$p-2m$	Differentialgleichungen		$2m^{\text{ter}}$	Ordnung,
$p-2m+1$	-	-	$2(m-1)^{\text{ter}}$	-
$p-2m+2$	-	-	$2(m-2)^{\text{ter}}$	-
. . . . .				
$p-m-1$	-	-	2ter	-

und eine Quadratur.

§. 10.

Zweite Methode zur Lösung des indeterminirten Falles.

Von dieser Methode ist wesentlich unterschieden eine andere, welche derjenigen näher kommt, durch welche das *Pfaff*sche Problem in der Regel bei einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen gelöst wird. Sie beruht auf dem einfachen Gedanken, dass der Ausdruck

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

durch eine Gleichung von der Form

$$f_m = \Psi(f, f_1, f_2, \ldots f_{m-1}, F_1, F_2, \ldots F_m)$$

in einen anderen übergeführt wird, welcher die Gestalt

$$F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(2)} + \cdots + F_m^{(1)} df_m^{(m)}$$

annehmen kann, ohne dass zwischen den $f_1^{(1)}$, $F^{(1)}$ eine Beziehung eintritt, welcher also der *ersten* Classe von Problemen angehört. Gelingt es daher irgend eine Function φ von $f, f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ aufzufinden, und eliminirt man mit Hülfe der Gleichung $\varphi = \text{Const.}$ eine der Veränderlichen, so kann man den resultirenden Ausdruck nach der Methode des §. 4. behandeln.

Um eine solche Function zu finden, kann man folgendermassen verfahren. Betrachten wir das System von Gleichungen:

$$(32^a.)\quad \begin{cases} * & +a_{2,1}z_2 & +a_{3,1}z_3 & +\cdots+a_{2m+2,1}z_{2m+2} = X_1, \\ a_{1,2}z_1 & + * & +a_{3,2}z_3 & +\cdots+a_{2m+2,2}z_{2m+2} = X_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,2m+2}z_1 & +a_{2,2m+2}z_2 & +a_{3,2m+2}z_3 & +\cdots+ * = X_{2m+2}, \end{cases}$$

wo für den Augenblick von der gegenwärtigen Bedeutung der Grössen a und X abstrahirt, und statt dessen ihnen die Bedeutung beigelegt werden soll:

$$(33.)\quad \begin{cases} X_k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}, \\ a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \right). \end{cases}$$

Man erhält hieraus den vorliegenden Fall, wenn man $F=1$ annimmt.

Setzt man

$$D = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{2m+2,2m+2},$$

so ist bekanntlich D das Quadrat eines rationalen Ausdrucks R, und die directe Auflösung des Systems $(32^a.)$ giebt

$$(34.)\quad R.z_h = X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}} + X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}} + \cdots + X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}}.$$

Aber, wie in §. 5 bewiesen ist, folgt aus (31.) auch mit Hülfe der Gleichungen (33.):

$$(35.)\quad \Delta.z_h = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m+1} F_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

wobei Δ die Determinante bedeutet:

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial F}{\partial x_{m+2}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+3}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m+2}},$$

und wo ausserdem $\Delta^2 = D$, so dass demzufolge

$$\Delta = R$$

wird. Daher folgt aus den Gleichungen (34.), (35.):

$$(36.)\quad X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}} + X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}} + \cdots + X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} F_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}}.$$

Die Ableitung dieser Gleichung beruht auf rein algebraischen Principien, und

die Gleichung ist daher mit Rücksicht auf die Gleichungen (33.) unter allen Umständen eine identische. Sie kann nicht aufhören zu gelten, wenn auch $F=1$ gesetzt wird; wobei denn freilich Δ verschwindet, die z hingegen unendlich grosse Werthe annehmen.

Setzt man aber $F=1$, wie es im vorliegenden Falle geschehen muss, so verschwindet der Ausdruck $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}}$ jedesmal, wenn nicht $\lambda=0$ ist. Setzt man also der Kürze wegen

$$(37.) \qquad X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}}=Z_h,$$

so geht die Gleichung (36.) über in:

$$Z_h=-\frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_h}}.$$

Man erhält ferner, wenn φ eine beliebige Function bedeutet:

$$Z_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+Z_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\cdots+Z_{2m+2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+2}}$$
$$=-\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+2}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+3}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m+2}}.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$A[\varphi]=Z_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+Z_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\cdots+Z_{2m+2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+2}}=0$$

ist daher

$$\varphi=\Pi(f, f_1, \ldots f_m, F_1, \ldots F_m, x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots x_p).$$

Bildet man jetzt $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $\ldots$ $R^{(p-2m-2)}$ ähnlich wie R, indem man an Stelle der a mit einem der Indices $2m+2$ der Reihe nach Grössen a eintreten lässt, welche die Indices $2m+3$, $2m+4$, $\ldots$ p haben, und bildet man dann die Ausdrücke

$$Z_h^{(1)}=X_1\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+1}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2m+1}}+X_{2m+3}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2m+3}},$$
$$Z_h^{(1)}=X_1\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+1}\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2m+1}}+X_{2m+4}\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2m+4}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so gestatten die Gleichungen

$$(38.)\quad \begin{cases} A[\varphi] = Z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}} = 0, \\ A^{(1)}[\varphi] = Z_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+3}^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+3}} = 0, \\ A^{(2)}[\varphi] = Z_1^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+4}^{(2)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+4}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

offenbar eine gemeinsame Lösung, nämlich

$$\varphi = \Pi(f, f_1, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m).$$

Dies ist gerade die gesuchte Function; und die Aufgabe kommt daher zurück auf die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen (38.) zu finden.

Dividirt man aber diese Gleichungen respective durch Z_{2m+2}, $Z_{2m+3}^{(1)}$, ..., und führt dann als unabhängige Veränderliche die Grössen

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m,\ x_{2m+2},\ x_{2m+3},\ \ldots\ x_p$$

ein, so erhält man sogleich:

$$B[\varphi] = \frac{1}{Z_{2m+2}} A[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),$$

$$B^{(1)}[\varphi] = \frac{1}{Z_{2m+3}^{(1)}} A^{(1)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+3}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B^{(p-2m-2)}[\varphi] = \frac{1}{Z_p^{(p-2m-2)}} A^{(p-2m-2)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right).$$

Es gelten daher wieder die Gleichungen

$$B^{(i)}[B^{(k)}[\varphi]] = B^{(k)}[B^{(i)}[\varphi]];$$

und man kann also die Methode des §. 6 auf diese Gleichungen anwenden. Die Auffindung der simultanen Lösung erfordert je ein Integral von $p-2m-1$ Differentialgleichungen, welche sämmtlich bis zur $2m+1^{\text{ten}}$ Ordnung aufsteigen können.

Da durch die Gleichung $\varphi = \text{Const.}$ alsdann das Problem auf eines der ersten Art zurückgeführt wird, so erfordert auf diesem Wege die vollständige Lösung des Problems im ungünstigsten Falle die Kenntniss je eines Integrals von

$p-2m-1$	Differentialgleichungen	$(2m+1)^{\text{ter}}$	Ordnung
$p-2m$	–	$(2m-1)^{\text{ter}}$	–
$p-2m+1$	–	$(2m-3)^{\text{ter}}$	–
. . . . .			
$p-m-1$	–	1ter	– .

Vergleicht man dies mit dem Ende des vorigen §., so erkennt man, dass im Allgemeinen die dort angegebene Methode vor dieser wegen der niedrigeren Ordnung der Operationen den Vorzug verdienen wird. Aber wenn zufällig ein simultanes Integral der Gleichungen (38.) bekannt ist, so ist ihrerseits die Ordnung der Operationen für die letzte Methode die niedrigere, und die letzte verdient also den Vorzug. Dies tritt z. B. ein, wenn der gegebene Differentialausdruck nur $2m+1$ Veränderliche enthält. Dann verschwinden sämmtliche Grössen Z, und jede beliebige Function der Veränderlichen kann als simultanes Integral der Gleichungen (38.) angesehen werden; d. h. man reducirt den Differentialausdruck auf einen anderen von $2m$ Veränderlichen, indem man zwischen den vorliegenden $2m+1$ Veränderlichen eine beliebige Beziehung festsetzt. Dies ist der gewöhnliche Weg, der eben hier auch den Vorzug verdient.

§. 11.

Vollständige Durchführung der successiven Lösung des *Pfaff*schen Problems für den determinirten Fall.

Im Vorhergehenden sind die Methoden kurz skizzirt, mit deren Hülfe man in allen Fällen auf möglichst kurzem Wege zur Lösung des *Pfaff*schen Problems gelangt. Ich kehre jetzt zu demjenigen Problem zurück, welches wegen seiner Beziehungen zu den partiellen Differentialgleichungen vorzugsweise Aufmerksamkeit erregt, nämlich zu dem Problem, den Ausdruck

$$(1.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

auf die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

zurückzuführen; und ich werde an die in §. 7 gegebene Lösung einige weitere Bemerkungen knüpfen.

Der Gang der dort angegebenen Operationen ist folgender. Zunächst bestimmt man aus den linearen Gleichungen

$$(2.) \quad \begin{cases} * \quad + a_{2,1} z_2 + a_{3,1} z_3 + \cdots + a_{2n,1} z_{2n} = X_1, \\ a_{1,2} z_1 + \quad * \quad + a_{3,2} z_3 + \cdots + a_{2n,2} z_{2n} = X_2, \\ a_{1,3} z_1 + a_{2,3} z_2 + \quad * \quad + \cdots + a_{2n,3} z_{2n} = X_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,2n} z_1 + a_{2,2n} z_2 + a_{3,2n} z_3 + \cdots + \quad * \quad = X_{2n}, \end{cases}$$

wo

$$a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

die Unbekannten z, sucht eine Lösung φ_n der Gleichung

$$(3.) \qquad z_1\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}+\cdots+z_{2n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{2n}}=0,$$

und betrachtet dann in Folge der Gleichung

$$\varphi_n = c_n,$$

wo c_n eine willkürliche Constante bezeichnet, x_{2n} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, c_n$. Hierdurch geht der Ausdruck (1.) über in

$$(4.) \qquad X_1^{(1)}dx_1+X_2^{(1)}dx_2+\cdots+X_{2n-1}^{(1)}dx_{2n-1},$$

wo

$$(5.) \qquad X_k^{(i)} = X_k+X_{2n}\frac{\partial x_{2n}}{\partial x_k}$$

gesetzt ist. Wird nunmehr auch

$$(6.) \qquad a_{i,k}^{(1)} = \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial x_i}$$

gesetzt, wo aber bei der Differentiation $X_i^{(1)}$, $X_k^{(1)}$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, c_n$ zu betrachten sind, so hat man die beiden Systeme von Gleichungen zu bilden:

$$(7.) \quad \begin{cases} * & +a_{2,1}^{(1)}z_{2,1} & +a_{3,1}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,1}^{(1)}z_{2n-2,1} = X_1^{(1)}, \\ a_{1,2}^{(1)}z_{1,1} & + * & +a_{3,2}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,2}^{(1)}z_{2n-2,1} = X_2^{(1)}, \\ a_{1,3}^{(1)}z_{1,1} & +a_{2,3}^{(1)}z_{2,1} & + * & +\cdots+a_{2n-2,3}^{(1)}z_{2n-2,1} = X_3^{(1)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,2n-2}^{(1)}z_{1,1} & +a_{2,2n-2}^{(1)}z_{2,1} & +a_{3,2n-2}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+ * = X_{2n-2}^{(1)}, \end{cases}$$

$$(8.) \quad \begin{cases} * & +a_{2,1}^{(1)}z'_{2,1} & +a_{3,1}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,1}^{(1)}z'_{2n-2,1} = -a_{2n-1,1}^{(1)}, \\ a_{1,2}^{(1)}z'_{1,1} & + * & +a_{3,2}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,2}^{(1)}z'_{2n-2,1} = -a_{2n-1,2}^{(1)}, \\ a_{1,3}^{(1)}z'_{1,1} & +a_{2,3}^{(1)}z'_{2,1} & + * & +\cdots+a_{2n-2,3}^{(1)}z'_{2n-2,1} = -a_{2n-1,3}^{(1)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,2n-2}^{(1)}z'_{1,1} & +a_{2,2n-2}^{(1)}z'_{2,1} & +a_{3,2n-2}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+ * = -a_{2n-1,2n-2}^{(1)} \end{cases}$$

und eine gemeinschaftliche Lösung der beiden Gleichungen

$$(9.) \quad \begin{cases} z_{1,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1}+z_{2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+z_{2n-2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-2}} = 0, \\ z'_{1,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1}+z'_{2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+z'_{2n-2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-2}}+\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-1}} = 0 \end{cases}$$

aufzusuchen. Setzt man

$$(10.) \qquad \varphi_{n-1} = c_{n-1},$$

so wird x_{2n-1} eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-2}, c_n, c_{n-1}$, und indem man dies einführt, geht der gegebene Differentialausdruck über in:

$$(11.) \qquad X_1^{(2)} dx_1 + X_2^{(2)} dx_2 + \cdots + X_{2n-2}^{(2)} dx_{2n-2},$$

wo

$$(12.) \qquad X_k^{(2)} = X_k^{(1)} + X_{2n-1}^{(1)} \frac{\partial x_{2n-1}}{\partial x_k}.$$

Sei nun wieder:

$$(13.) \qquad a_{i,k}^{(2)} = \frac{\partial X_i^{(2)}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k^{(2)}}{\partial x_i},$$

wobei $X_i^{(2)}$, $X_k^{(2)}$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-2}, c_n, c_{n-1}$ betrachtet werden müssen. Aus diesen Grössen setzt man dann folgende Systeme von Gleichungen zusammen:

$$(14.) \quad \begin{cases} * + a_{2,1}^{(2)} z_{2,2} + a_{3,1}^{(2)} z_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,1}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_1^{(2)}, \\ a_{1,2}^{(2)} z_{1,2} + * + a_{3,2}^{(2)} z_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,2}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_2^{(2)}, \\ a_{1,3}^{(2)} z_{1,2} + a_{2,3}^{(2)} z_{2,2} + * + \cdots + a_{2n-4,3}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\

Man setzt dann $\varphi_{n-2} = c_{n-2}$, und bestimmt daraus x_{2n-2} als Function von $x_1, x, \ldots x_{2n-3}, c_n, c_{n-1}, c_{n-2}$ u. s. w.

Indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man zu einer Function φ_{n-k}, welche die gemeinschaftliche Lösung von folgenden $k+1$ Gleichungen wird:

$$(18.)\quad \begin{cases} z_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1} + z_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + z_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}} = 0, \\ z'_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1} + z'_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + z'_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+1}} = 0, \\ z''_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1} + z''_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + z''_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+2}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

die Veränderlichen $x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots x_{2n-k+1}$ eliminirt, und bei den Differentiationen in (21.) ist darauf Rücksicht zu nehmen, dass $x_1, x_2, \ldots x_{2n-k}, c_n, c_{n-1}, \ldots c_{n-k+1}$ als die unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden.

§. 12.

Transformation der bisherigen successiven Lösung in eine gleichzeitige.

In den vorstehenden Formeln ist

φ_n eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$,

φ_{n-1} – – – $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, c_n$,

φ_{n-2} – – – $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}, c_{n-1}, c_n$,

φ_{n-3} – – – $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n$.

u. s. w.

Bedient man sich jetzt der Gleichungen

$$\varphi_n = c_n, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1}, \quad \varphi_{n-2} = c_{n-2}, \quad \text{etc.}$$

um aus $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}$ etc. die Constanten c zu eliminiren, so gehen φ_n, φ_{n-1} etc. in Functionen der x allein über, welche durch

$$H_n = c_n, \quad H_{n-1} = c_{n-1}, \quad \ldots \quad H_1 = c_1$$

bezeichnet sein mögen, und welche zusammen ebenfalls eine Lösung des *Pfaff*schen Problems vorstellen. Es entsteht die Frage, wie man die Gleichungen (3.), (9.), (17.), (18.) des vorigen §. so umgestalten kann, dass in ihnen die Functionen H als die Unbekannten erscheinen. Diese Umgestaltung kann man in passender Weise folgendermassen bewirken.

Man kann sich die Function φ_{n-k} aus H_{n-k} dadurch entstanden denken, dass man aus dieser Function die Veränderlichen $x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots x_{2n-k+1}$ mit Hülfe der Gleichungen

$$H_n = c_n, \quad H_{n-1} = c_{n-1}, \quad \ldots \quad H_{n-k+1} = c_{n-k+1}$$

eliminirt, wobei denn die $x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots x_{2n-k+1}$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-k}, c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, \ldots c_n$ erscheinen. Die Differentialquotienten von φ_{n-k}, welche in (18.) vorkommen, sind also an die Differentialquotienten von H_{n-k} durch die Gleichungen gebunden:

$$\frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k+1}} \cdot \frac{\partial x_{2n-k+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k+2}} \cdot \frac{\partial x_{2n-k+2}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} \cdot \frac{\partial x_{2n}}{\partial x_i},$$

wo dem Index i der Reihe nach die Werthe $1, 2, \ldots 2n-k$ beizulegen sind.

Führt man dies in die Gleichungen (18.) ein, so nehmen sie folgende Gestalt an:

$$(22.)\quad\begin{cases}
0 = \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} z_{i,k}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z_{1,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2(n-k),k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}}\right)\\
0 = \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} z'_{i,k}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+1}} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z'_{1,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z'_{2,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z'_{2(n-k),k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}\right)\\
0 = \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} z''_{i,k}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+2}} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z''_{1,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z''_{2,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z''_{2(n-k),k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+2}}\right)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 = \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} z^{(k)}_{i,k}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k}} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z^{(k)}_{1,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z^{(k)}_{2,k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z^{(k)}_{2(n-k),k}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2n-k}}\right).
\end{cases}$$

Denken wir uns, dass schliesslich die Function H_{n-k} folgenden $k+1$ Gleichungen genüge:

$$(22^a.)\quad\begin{cases}
u_1^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_2^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U^{(k)}(H_{n-k}),\\
u_{1,1}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_{2,1}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n,1}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U_1^{(k)}(H_{n-k}),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_{1,k}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_{2,k}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n,k}^{(k)}\frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U_k^{(k)}(H_{n-k}),
\end{cases}$$

so müssen die Gleichungen (22.) offenbar lineare Combinationen dieser Gleichungen sein; oder mit anderen Worten, es müssen solche Multiplicatoren $K_{\alpha,\beta}$ existiren, dass:

$$(23.)\quad\begin{cases}
K_{0,0}u_i^{(k)} + K_{0,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{0,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{0,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k},\\
K_{1,0}u_i^{(k)} + K_{1,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{1,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{1,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(1)},\\
K_{2,0}u_i^{(k)} + K_{2,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{2,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{2,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
K_{k,0}u_i^{(k)} + K_{k,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{k,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{k,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(k)},
\end{cases}$$

für $i=1, 2, \ldots 2(n-k)$; dass ferner für $h=2(n-k)+1, 2(n-k)+2, \ldots 2n-k$:

$$(24.)\quad \begin{cases} K_{0,0}\,u_h^{(k)} + K_{0,1}u_{h,1}^{(k)} + \cdots + K_{0,k}\,u_{h,k}^{(k)} = 0, \\ K_{1,0}\,u_h^{(k)} + K_{1,1}\,u_{h,1}^{(k)} + \cdots + K_{1,k}\,u_{h,k}^{(k)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{k,0}\,u_h^{(k)} + K_{k,1}\,u_{h,1}^{(k)} + \cdots + K_{k,k}\,u_{h,k}^{(k)} = 0, \end{cases}$$

ausgenommen, wenn in den letzten k Gleichungen h respective die Werthe $2(n-k)+1$ in der zweiten Gleichung, $2(n-k)+2$ in der dritten, etc. annimmt, wo denn:

$$(25.)\quad \begin{cases} K_{1,0}u_{2(n-k)+1}^{(k)} + K_{1,1}u_{2(n-k)+1,1}^{(k)} + \cdots + K_{1,k}u_{2(n-k)+1,k}^{(k)} = 1, \\ K_{2,0}u_{2(n-k)+2}^{(k)} + K_{2,1}u_{2(n-k)+2,1}^{(k)} + \cdots + K_{2,k}u_{2(n-k)+2,k}^{(k)} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{k,0}u_{2n-k}^{(k)} + K_{k,1}u_{2n-k,1}^{(k)} + \cdots + K_{k,k}u_{2n-k,k}^{(k)} = 1; \end{cases}$$

dass endlich für $\lambda = 2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$:

$$(26.)\quad \begin{cases} K_{0,0}u_\lambda^{(k)} + K_{0,1}u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{0,2}u_{\lambda,2}^{(k)} + \cdots + K_{0,k}u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}}, \\ K_{1,0}u_\lambda^{(k)} + K_{1,1}u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{1,2}u_{\lambda,2}^{(k)} + \cdots + K_{1,k}u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z'_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z'_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z'_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}, \\ K_{2,0}u_\lambda^{(k)} + K_{2,1}u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{2,2}u_{\lambda,2}^{(k)} + \cdots + K_{2,k}u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z''_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z''_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z''_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{k,0}u_\lambda^{(k)} + K_{k,1}u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{k,2}u_{\lambda,2}^{(k)} + \cdots + K_{k,k}u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z_{1,k}^{(k)}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k}^{(k)}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2(n-k),k}^{(k)}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2n-k}}. \end{cases}$$

Wenn die Grössen K und u diesen Gleichungen genügen, so sind die Gleichungen (22.) identisch mit folgendem System:

$$(27.)\quad \begin{cases} 0 = K_{0,0}U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{0,1}U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \cdots + K_{0,k}U_k^{(k)}(H_{n-k}), \\ 0 = K_{1,0}U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{1,1}U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \cdots + K_{1,k}U_k^{(k)}(H_{n-k}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = K_{k,0}U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{k,1}U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \cdots + K_{k,k}U_k^{(k)}(H_{n-k}), \end{cases}$$

oder auch mit (22.), sobald die Determinante

$$(28.) \qquad \Theta = \Sigma \pm K_{0,0} K_{1,1} \ldots K_{k,k}$$

von Null verschieden ist.

§. 13.

Fortsetzung der Transformation.

Es sind nunmehr die Gleichungen (19.), (20.) zu bilden, auf welchen die Bestimmung der z und also auch der u beruht. Betrachtet man, wie im Vorigen, x_{2n-k+1}, x_{2n-k+2}, ... x_{2n} als Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n-k}, c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, ... c_n, so ist

$$(29.) \quad \begin{cases} X_i^{(k)} = X_i + X_{2n-k+1} \dfrac{\partial x_{2n-k+1}}{\partial x_i} + X_{2n-k+2} \dfrac{\partial x_{2n-k+2}}{\partial x_i} + \cdots + X_{2n} \dfrac{\partial x_{2n}}{\partial x_i} \\ \qquad = X_i + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} . \end{cases}$$

Um $a_{i,m}^{(k)}$ zu bilden, muss man zunächst in (21.) wieder so differentiiren, als wären in $X_i^{(k)}$, $X_h^{(k)}$ nur noch die Veränderlichen x_1, x_2, ... x_{2n-k} enthalten; und führt man dies auf Differentiationen der X_i zurück, welche als Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n} gegeben vorliegen, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a_{i,m}^{(k)} &= \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m^{(k)}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_m} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \frac{\partial X_i}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \\ &+ \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_m} + \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_m} \right] \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \\ &- \frac{\partial X_m}{\partial x_i} - \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \frac{\partial X_m}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \\ &- \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_i} + \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} \right] \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man noch in der ersten Doppelsumme die Indices λ, μ mit einander vertauscht:

$$(30.) \quad \begin{cases} a_{i,m}^{(k)} = a_{i,m} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left(a_{i,\lambda} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} - a_{m,\lambda} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \right) \\ \qquad - \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \sum\limits_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} a_{\lambda,\mu} \dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_i} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} . \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke nehmen die Gleichungen (19.) die Gestalt an:

$$(31.)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} a_{i,m} z_{i,k} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} a_{i,\lambda} z_{i,k} \right) \\ \qquad + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left(a_{\lambda,m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} z_{i,k} \right) \\ \qquad + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} \left(a_{\mu,\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} z_{i,k} \right) \\ \qquad = X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Wenn man nun für die z ihre Werthe aus (23.) einführt und zugleich die Gleichungen (24.), (26.) berücksichtigt, so verbindet sich die erste Summe in dieser Gleichung mit der dritten zu:

$$K_{0,0} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_i^{(k)} + K_{0,1} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_{i,1}^{(k)} + \cdots + K_{0,k} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_{i,k}^{(k)},$$

und ganz ebenso wird der Coefficient von $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}$ aus der zweiten und vierten Summe:

$$K_{0,0} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_i^{(k)} + K_{0,1} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_{i,1}^{(k)} + \cdots + K_{0,k} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_{i,k}^{(k)}.$$

Setzen wir also der Kürze wegen:

$$(32.)\quad \begin{cases} a_{1,m} u_1^{(k)} + a_{2,m} u_2^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n}^{(k)} = v_m^{(k)}, \\ a_{1,m} u_{1,1}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,1}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,1}^{(k)} = v_{m,1}^{(k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,m} u_{1,k}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,k}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,k}^{(k)} = v_{m,k}^{(k)}, \end{cases}$$

so geht die Gleichung (31.) in folgende über:

$$(33.)\quad \begin{cases} K_{0,0} \left(v_m^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \right) \\ + K_{0,1} \left(v_{m,1}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \right) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + K_{0,k} \left(v_{m,k}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \right) \\ = X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man, immer mit Rücksicht auf (24.), (25.), (26.),

aus (20.) die Gleichung:

$$(34.)\quad \begin{cases} K_{h,0}\Big(v_m^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big) \\ + K_{h,1}\Big(v_{m,1}^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big) \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + K_{h,k}\Big(v_{m,k}^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big) = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung (34.) k verschiedene Gleichungen repräsentirt, so kann man aus diesen und (33.) die in den Klammern enthaltenen Grössen bestimmen; und es wird sodann:

$$v_m^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} = \mathrm{K}\Big(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big),$$

$$v_{m,1}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} = \mathrm{K}_1\Big(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$v_{m,k}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} = \mathrm{K}_k\Big(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\Big),$$

oder auch, nur anders geordnet:

$$(35.)\quad \begin{cases} (v_m^{(k)} - \mathrm{K}\ X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_\lambda^{(k)} - \mathrm{K}\ X_\lambda) = 0, \\ (v_{m,1}^{(k)} - \mathrm{K}_1 X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_{\lambda,1}^{(k)} - \mathrm{K}_1 X_\lambda) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (v_{m,k}^{(k)} - \mathrm{K}_k X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_{\lambda,k}^{(k)} - \mathrm{K}_k X_\lambda) = 0. \end{cases}$$

Bestimmt man jetzt k Factoren $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_k$ so, dass sie den k Gleichungen genügen:

$$(36.)\quad \begin{cases} v_{2n-k+1}^{(k)} = \mathrm{K} X_{2n-k+1} + \Lambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n-k+1}} + \Lambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n-k+1}} + \cdots + \Lambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n-k+1}}, \\ v_{2n-k+2}^{(k)} = \mathrm{K} X_{2n-k+2} + \Lambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n-k+2}} + \Lambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n-k+2}} + \cdots + \Lambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n-k+2}}, \\ . \quad . \\ v_{2n}^{(k)} = \mathrm{K} X_{2n} + \Lambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n}} + \Lambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n}} + \cdots + \Lambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n}} \end{cases}$$

und bemerkt dann, dass

$$\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m},$$

so giebt die erste der Gleichungen (35.), in welchen m die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k)$ erhalten muss, sogleich auch:

$$(37.)\quad \begin{cases} v_1^{(k)} = \mathrm{K} X_1 + \Lambda_1 \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_1} + \Lambda_2 \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_1} + \cdots + \Lambda_k \frac{\partial H_n}{\partial x_1}, \\ v_2^{(k)} = \mathrm{K} X_2 + \Lambda_1 \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_2} + \Lambda_2 \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_2} + \cdots + \Lambda_k \frac{\partial H_n}{\partial x_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{2(n-k)}^{(k)} = \mathrm{K} X_{2(n-k)} + \Lambda_1 \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2(n-k)}} + \Lambda_2 \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2(n-k)}} + \cdots + \Lambda_k \frac{\partial H_n}{\partial x_{2(n-k)}}. \end{cases}$$

Ganz ähnliche Systeme ergeben sich aus der zweiten Gleichung (35.) für die $v_{i,1}^{(k)}$, u. s. w., nur dass an Stelle der K, Λ jedesmal andere Grössen treten. Bemerkt man indessen, dass die Grössen:

$$v_i^{(k)}, \quad v_{i,1}^{(k)}, \quad v_{i,2}^{(k)}, \quad \ldots$$

auf ganz analoge Weise respective aus den Grössen

$$u_i^{(k)}, \quad u_{i,1}^{(k)}, \quad u_{i,2}^{(k)}, \quad \ldots$$

zusammengesetzt sind; dass man aber offenbar an Stelle der $u_{i,k}$ jede beliebige lineare Verbindung

$$\alpha u_i + \alpha_1 u_{i,1} + \alpha_2 u_{i,2} + \cdots$$

treten lassen kann, indem alsdann statt der Gleichungen (22^a.) nur lineare Verbindungen derselben zu Grunde gelegt werden, so erkennt man, dass man über die Coefficienten K, Λ vollkommen frei verfügen kann; dass es also zum Beispiel erlaubt ist, in dem System (36.) sämmtliche Λ gleich Null und K gleich Eins zu setzen, sowie in den analogen Systemen die K und alle Λ bis auf je eines verschwinden zu lassen.

Auf diese Weise gehen aus den Gleichungen (36.) folgende Gleichungen hervor, in welchen der Index m die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k)$ und $2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$ annehmen kann:

$$(38.)\quad \begin{cases} v_m^{(k)} = a_{1,m} u_1^{(k)} + a_{2,m} u_2^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n}^{(k)} = X_m, \\ v_{m,1}^{(k)} = a_{1,m} u_{1,1}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,1}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,1}^{(k)} = \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_m}, \\ v_{m,2}^{(k)} = a_{1,m} u_{1,2}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,2}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,2}^{(k)} = \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{m,k}^{(k)} = a_{1,m} u_{1,k}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,k}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,k}^{(k)} = \frac{\partial H_n}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Ich werde jetzt zeigen, dass diese Gleichungen auch noch für die fehlenden Werthe von m, also für $m = 2(n-k)+1,\ 2(n-k)+2,\ \ldots\ 2n-k$ gültig sind, wodurch denn die Grössen u sich vollständig bestimmen.

§. 14.

Schluss der Transformation.

Die so eben angeführten Gleichungen ersetzen die Stelle der Gleichungen (19.), (20.), durch welche die z sich ursprünglich bestimmten. Zwischen den Grössen u finden aber noch weitere Beziehungen statt, welche in den Gleichungen (23.) bis (26.) enthalten sind. Man sieht leicht, dass der Uebergang von den Gleichungen (36.), (37.) zu (38.) damit übereinkommt, dass man $K_{0,0}$ gleich Eins, und $K_{1,0}$, $K_{2,0}$, ... gleich Null gesetzt hat, wodurch die oben durch K_1, K_2, ... bezeichneten Grössen verschwinden, während K der Einheit gleich wird. Unter diesen Umständen genügen die Gleichungen (24.), (25.) um die übrigen Coefficienten K durch die Grössen u auszudrücken. Wenn man diese Werthe so wie die Werthe der z aus (23.) in die Gleichungen (26.) einführt, so gehen dieselben in $k(k+1)$ Bedingungsgleichungen über, denen die Grössen u noch zu genügen haben. Statt aber in dieser Weise zu verfahren, kann man sich eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen folgendermassen zusammensetzen.

Es sei H_μ irgend eine der Functionen H_{n-k+1}, H_{n-k+2}, ... H_n. Multiplicirt man nun jede der Gleichungen (26.) mit $\frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda}$ und summirt nach λ von $2n-k+1$ bis $2n$, nachdem man für die z aus (23.) ihre Werthe gesetzt hat, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\Sigma_\lambda \frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_i},$$

folgendes System:

$$K_{0,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{0,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \cdots + K_{0,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = 0,$$

$$K_{1,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{1,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \cdots + K_{1,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2(n-k)+1}},$$

$$K_{2,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{2,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \cdots + K_{2,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2(n-k)+2}},$$

. . . . . .

$$K_{k,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{k,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \cdots + K_{k,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2n-k}},$$

wo unter den Summenzeichen m jedesmal die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k)$, $2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$ erhalten muss. Aber aus den Gleichungen (24.), (25.) folgt, dass man sofort in diesen Summen dem Index m alle Werthe von 1 bis $2n$ beilegen kann, sobald man nur auf der rechten Seite überall Null setzt. Und dann gehen also diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}
K_{0,0}U^{(k)}(H_\mu)+K_{0,1}U_1^{(k)}(H_\mu)+\cdots+K_{0,k}U_k^{(k)}(H_\mu) &= 0,\\
K_{1,0}U^{(k)}(H_\mu)+K_{1,1}U_1^{(k)}(H_\mu)+\cdots+K_{1,k}U_k^{(k)}(H_\mu) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots

Denn multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $z_{1,k}$, $z_{2,k}$ etc. und benutzt die Gleichungen (19.) selbst, so geht die Summe über in

$$z_{1,k}X_1^{(k)}+z_{2,k}X_2^{(k)}+\cdots = -(z_{1,k}X_1^{(k)}+z_{2,k}X_2^{(k)}+\cdots)$$

oder in

$$z_{1,k}X_1^{(k)}+z_{2,k}X_2^{(k)}+\cdots = 0.$$

Die rechten Theile der übrigen Gleichungen (40.) aber stellen, wie man aus den Gleichungen (20.) leicht erkennt, nichts anderes dar als diejenigen Ausdrücke, welche verschwinden müssen, sobald jeder der Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&X_1^{(k)}dx_1+X_2^{(k)}dx_2+\cdots+X_{2(n-k)}^{(k)}dx_{2(n-k)}+X_{2(n-k)+1}^{(k)}dx_{2(n-k)+1},\\
&X_1^{(k)}dx_1+X_2^{(k)}dx_2+\cdots+X_{2(n-k)}^{(k)}dx_{2(n-k)}+X_{2(n-k)+2}^{(k)}dx_{2(n-k)+2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

durch $n-k$ Gleichungen integrirbar sein soll. Da demnach die linken Theile der Gleichungen (40.) gleich Null sein müssen, so hat man die Gleichungen:

$$(41.)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}X_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)}X_i = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,k}^{(k)}X_i = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man jetzt die erste Gleichung (38.) mit $u_m^{(k)}$ und summirt nach m, indem man diesem Index die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k), 2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$ giebt, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen (38.) selbst und auf (41.):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}\{-X_i+a_{2(n-k)+1,i}u_{2(n-k)+1}^{(k)}+a_{2(n-k)+2,i}u_{2(n-k)+2}^{(k)}+\cdots+a_{2n-k,i}u_{2n-k}^{(k)}\}\\
= -\{u_{2(n-k)+1}X_{2(n-k)+1}+u_{2(n-k)+2}X_{2(n-k)+2}+\cdots+u_{2n-k}X_{2n-k}\},
\end{aligned}$$

oder auch, da $\Sigma u_i^{(k)}X_i$ verschwindet:

$$\begin{aligned}
0 = {} & u_{2(n-k)+1}\left\{\sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2(n-k)+1}u_i^{(k)}-X_{2(n-k)+1}\right\}\\
&+u_{2(n-k)+2}\left\{\sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2(n-k)+2}u_i^{(k)}-X_{2(n-k)+2}\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+u_{2n-k}\left\{\sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2n-k}u_i^{(k)}-X_{2n-k}\right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man statt dessen die erste Gleichung (38.) mit $u_{m,1}^{(k)}$ und summirt

nach m, so erhält man eine ähnliche Gleichung, in welcher nur statt

$$u_{2(n-k)+1}, \quad u_{2(n-k)+2}, \quad \ldots$$

die Grössen

$$u_{2(n-k)+1,1}, \quad u_{2(n-k)+2,1}, \quad \ldots$$

vor den Klammern erscheinen. Auf diese Weise erhält man successive $k+1$ ähnliche Gleichungen, in welchen die eingeklammerten Grössen jedesmal dieselben sind. Es folgt daraus, dass diese selbst verschwinden müssen, d. h. dass die erste Gleichung (38.) auch noch für $m=2(n-k)+1,\ 2(n-k)+2,\ \ldots\ 2n-k$, mithin überhaupt für alle Werthe von m gilt.

Dasselbe wird in genau gleicher Weise von der zweiten Gleichung (38.) nachgewiesen, wenn man in den soeben beschriebenen Operationen statt der Gleichungen (41.) die aus (39.) fliessenden Gleichungen

$$U^{(k)}(H_{n-k+1})=0, \quad U_1^{(k)}(H_{n-k+1})=0, \quad \ldots \quad U_k^{(k)}(H_{n-k+1})=0$$

benutzt.

Und so ist denn überhaupt nachgewiesen, dass die Gleichungen (38.) für alle Werthe von m gelten.

§. 15.

Definition der Lösung des *Pfaff*schen Problems durch $\frac{n.n+1}{2}$ simultane partielle Differentialgleichungen.

Das Resultat dieser sehr complicirten Betrachtungen ist nunmehr ein sehr einfaches. Denn bezeichnet man durch R das bekannte Aggregat, dessen Quadrat der Determinante

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{2n,2n}$$

gleich wird, und durch $R_{i,k}$ den Differentialquotienten desselben, genommen nach $a_{i,k}$, so giebt die Auflösung der Gleichungen (38.):

$$\begin{aligned}
R.u_i^{(k)} &= X_1 R_{i,1} + X_2 R_{i,2} + \cdots + X_{2n} R_{i,2n} \\
R.u_{i,1}^{(k)} &= \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_2} R_{i,2} + \cdots + \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n}} R_{i,2n}, \\
R.u_{i,2}^{(k)} &= \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_2} R_{i,2} + \cdots + \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n}} R_{i,2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
R.u_{i,k}^{(k)} &= \frac{\partial H_n}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_n}{\partial x_2} R_{i,2} + \cdots + \frac{\partial H_n}{\partial x_{2n}} R_{i,2n},
\end{aligned}$$

und die $k+1$ Gleichungen, denen die Function H_{n-k} genügen muss, sind

demnach folgende:

$$(42.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_h X_i \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} = 0, \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} = 0, \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_n}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man also durch (ψ) den Ausdruck:

$$(43.)\quad (\psi) = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_h} R_{i,h};$$

und durch $[\psi, \varphi]$ den Ausdruck:

$$(44.)\quad [\psi, \varphi] = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_h} R_{i,h},$$

so dass

$$[\psi, \varphi] = -[\varphi, \psi], \quad [\psi, \psi] = 0,$$

so nehmen die Gleichungen (42.) die einfache Form an:

$$(45.)\quad (H_{n-k}) = 0, \quad [H_{n-k}, H_{n-k+1}] = 0, \quad [H_{n-k}, H_{n-k+2}] = 0, \quad \ldots \quad [H_{n-k}, H_n] = 0.$$

Die erste Gleichung ist, wie man bemerkt, nichts Anderes als die partielle Differentialgleichung, welche dem ersten *Pfaff*schen System entspricht; und dass die Functionen H sämmtlich dieser Gleichung genügen, ist sehr bekannt. Aber die anderen Gleichungen bilden ein merkwürdiges System von Beziehungen, welche zwischen den Functionen H eintreten, wichtig genug sie in einem Theorem besonders hervorzuheben:

Theorem I.

Wenn man einen Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in der Form

$$M_1 dH_1 + M_2 dH_2 + \cdots + M_n dH_n$$

darstellt, so genügen die Functionen H sämmtlich der Gleichung

$$(H) = 0 = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h X_i \frac{\partial H}{\partial x_h} R_{i,h};$$

ausserdem aber noch $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen, welche aus der Gleichung

$$[H_\mu, H_\nu] = 0 = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial H_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial H_\mu}{\partial x_h} R_{i,h}$$

hervorgehen, indem man den Zahlen μ und ν die Werthe 1, 2, ... n *beilegt; und umgekehrt kann man durch jede n Functionen H, welche diesen Gleichungen genügen, dem obigen Differentialausdruck jene Form geben.*

§. 16.

Beziehungen zwischen den gefundenen simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Man kann die Ausdrücke (ψ), $[\psi, \varphi]$ als *Operationen* auffassen, welche mit den Functionen φ, ψ vorgenommen werden. In diesem Falle ist schon dadurch, dass diese Operationen aus den in §. 5. angegebenen Operationen

$$A[\varphi], \quad A_1[\varphi], \quad \text{etc.}$$

hervorgegangen sind, ersichtlich, dass zwischen den neuen Operationen in ähnlicher Weise Beziehungen obwalten müssen, wie deren im angeführten §. zwischen jenen Operationen angegeben sind. Diese Beziehungen sollen nun entwickelt werden; woran sich dann einige bemerkenswerthe Folgerungen knüpfen.

Denken wir uns wieder den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

bereits auf irgend eine Weise in die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

gebracht, so dass identisch

$$(46.) \qquad X_i = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}.$$

Alsdann ist auch, wie in §. 3 (12.) bereits angegeben:

$$(47.) \qquad a_{i,m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \right).$$

Die Gleichungen (38.) nehmen hiernach folgende Gestalt an:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_i^{(s)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_i^{(s)} \right\} = X_m,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,1}^{(s)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,1}^{(s)} \right\} = \frac{\partial H_{n-s+1}}{\partial x_m},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,2}^{(s)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,2}^{(s)} \right\} = \frac{\partial H_{n-s+2}}{\partial x_m},$$

. . . . . .

Wenn man aber hier für X_m seinen Werth aus (46.) und, indem man in den Functionen H die F, f als unabhängige Veränderliche eingeführt denkt, für $\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m}$ den Ausdruck setzt:

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_\mu}{\partial F_\lambda}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} + \frac{\partial H_\mu}{\partial f_\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m}\right),$$

so zerfallen diese Gleichungen unmittelbar in folgende:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -F_\lambda, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial F_\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial f_\lambda}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,2}^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial F_\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,2}^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial f_\lambda}, \end{cases}$$

. . . . . .

Multiplicirt man nun immer die erste Gleichung jedes dieser Paare mit $\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda}$, die zweite mit $\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}$, addirt beide, und nimmt dann die Summe für λ, so kommt:

$$u_m^{(k)} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda},$$

$$u_{m,1}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial F_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial f_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}\right),$$

$$u_{m,2}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial F_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial f_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}\right),$$

. . . . . .

und demnach ergeben sich für (ψ) und $[\psi, H]$ folgende Ausdrücke:

(48.)
$$\begin{cases} (\psi) = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}, \\ [\psi, H] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\right). \end{cases}$$

Diese beiden Formeln gestatten es sehr leicht, die Beziehungen zwischen den beiden Operationssymbolen zu ermitteln. Man erkennt in dem zweiten dieselbe Form, welche in der Theorie der Störungen und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine so grosse Rolle spielt. In Bezug auf dieselbe hat *Jacobi* nachgewiesen, was leicht zu verificiren ist, dass, wenn φ, ψ, H drei ganz beliebige Functionen bedeuten, immer folgende identische Gleichung stattfindet:

$$(49.) \qquad [\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]+[H,[\varphi,\psi]] = 0.$$

Es bleibt also nur übrig, zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi,H]$ noch eine Beziehung aufzusuchen. In Folge der Gleichungen (48.) hat man offenbar, wenn ψ und H beliebige Functionen bedeuten:

$$[(\psi),H] = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left\{\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial F_\mu\partial f_\lambda}-\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial F_\mu\partial F_\lambda}\right\}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}$$

$$[(H),\psi] = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2 H}{\partial F_\mu\partial f_\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2 H}{\partial F_\mu\partial F_\lambda}\right\}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\cdot\frac{\partial H}{\partial F_\lambda},$$

oder wenn man eine dieser Gleichungen von der anderen abzieht:

$$(50.) \qquad \begin{cases}[(\psi),H]-[(H),\psi] = -[\psi,H]+\sum_{\mu=1}^{\mu=n}F_\mu\frac{\partial}{\partial F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\right\}\\ \qquad\qquad = ([\psi,H])-[\psi,H].\end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung. Ueberträgt man die Gleichungen (50.) auf die ursprüngliche Form, in welcher die Operationen (ψ) und $[\psi,H]$ auszuführen sind, so gelangt man zu folgendem bemerkenswerthen

Theorem II.

Bezeichnet man durch φ, ψ, H ganz beliebige Functionen und durch (φ), $[\psi,H]$ die beiden Operationen:

$$(\varphi) = \frac{1}{R}\Sigma\Sigma X_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}R_{i,m},$$

$$[\psi,H] = \frac{1}{R}\Sigma\Sigma\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_m}R_{i,m},$$

so finden immer folgende identische Gleichungen Statt:

$$[\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]+[H,[\varphi,\psi]] = 0,$$
$$([\psi,H])-[(\psi),H]+[(H),\psi]-[\psi,H] = 0.$$

§. 17.

Ueber die Integration des *Pfaff*schen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bei der bekannten Behandlungsweise des *Pfaff*schen Problems bildet die Integration des ersten *Pfaff*schen Systems, d. h. die vollständige Integration der Gleichung $(\varphi) = 0$, nur einen ersten Schritt zur Lösung des Problems. Bei der gegenwärtigen Auflösungsmethode kann man es als eine besonders ausgezeichnete Eigenschaft dieser Gleichung betrachten, dass ihre vollständige Integration nichts weiter verlangt als die Lösung des *Pfaff*schen Problems; indem die bei diesem vorzunehmenden Integrationen von niedrigerer Ordnung sind, als diejenigen, welche im Allgemeinen zur Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen nothwendig werden. In der That kann man, nachdem das *Pfaff*sche Problem gelöst worden, sämmtliche Integrale desjenigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen leicht angeben, auf welches die Gleichung $(\varphi) = 0$ führt. Nach dem, was in §. 3 entwickelt ist, sind erstlich die Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \ldots \quad \varphi_n = c_n, \quad \text{oder}$$
$$H_1 = c_1, \quad H_2 = c_2, \quad \ldots \quad H_n = c_n$$

Integrale derselben. Sodann aber sind, wenn identisch

$$(51.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = M_1 dH_1 + M_2 dH_2 + \cdots + M_n dH_n$$

gefunden wird, die übrigen Integrale durch die Proportion gegeben:

$$(52.) \qquad M_1 : M_2 : \ldots : M_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ neue willkürliche Constanten bedeuten. Denkt man sich etwa die Transformation (51.) dadurch hervorgebracht, dass man mittelst der Gleichungen

$$H_1 = c_1, \qquad H_2 = c_2, \qquad \ldots \qquad H_n = c_n$$

die Veränderlichen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $c_1, c_2, \ldots c_n$ ausdrückt, so hat man an Stelle von (52.) die Gleichungen:

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_1} = \lambda \alpha_1,$$
$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_2} = \lambda \alpha_2,$$
$$\cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_n} = \lambda \alpha_n,$$

wo λ einen willkürlichen Factor bedeutet. Will man diese Elimination nicht ausführen, so kann man die aus (52.) entspringenden Gleichungen

$$X_i = M_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_i} + M_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + \cdots + M_n \frac{\partial H_n}{\partial x_i}$$

zu Grunde legen. Setzt man in diesen

$$M_1 = \lambda \alpha_1, \qquad M_2 = \lambda \alpha_2, \qquad \ldots$$

so gehen sie über in

$$X_i = \lambda \left\{ \alpha_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial H_n}{\partial x_i} \right\},$$

und irgend n von diesen $2n$ Gleichungen stellen dann die fehlenden Integrale dar.

Aber aus den Gleichungen (49.), (50.) des vorigen §. geht ein Satz hervor, welcher, wenn es sich nur um die Integration des ersten *Pfaff*schen Systems handelt, die Operationen noch bedeutend abkürzt. Denn bezeichnen wir durch φ, ψ, H irgend drei Lösungen der Gleichung

$$(\varphi) = 0,$$

d. h. irgend drei Integrale des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, so hat man nach (50.) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ([\varphi, \psi]) - [\varphi, \psi] &= 0, \\ ([\psi, H]) - [\psi, H] &= 0, \\ ([H, \varphi]) - [H, \varphi] &= 0, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} [\psi, H]([\varphi, \psi]) - [\varphi, \psi]([\psi, H]) &= 0, \\ [H, \varphi]([\psi, H]) - [\psi, H]([H, \varphi]) &= 0, \\ [\varphi, \psi]([H, \varphi]) - [H, \varphi]([\varphi, \psi]) &= 0, \end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{[\varphi, \psi]}{[\psi, H]}\right) &= 0, \\ \left(\frac{[\psi, H]}{[H, \varphi]}\right) &= 0, \\ \left(\frac{[H, \varphi]}{[\varphi, \psi]}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Quotienten

$$\frac{[\varphi, \psi]}{[\psi, H]}, \qquad \frac{[\psi, H]}{[H, \varphi]}, \qquad \frac{[H, \varphi]}{[\varphi, \psi]}$$

sind also neue Lösungen der Gleichung $(\varphi) = 0$, oder neue Integrale des ersten *Pfaff*schen Systems; sie reduciren sich auf zwei von einander unab-

hängige, und diese beiden können, wenn α, β, γ willkürliche Constanten, λ einen unbestimmten Factor bezeichnet, durch die drei Gleichungen

$$[\varphi, \psi] = \lambda\alpha, \quad [\psi, H] = \lambda\beta, \quad [H, \varphi] = \lambda\gamma$$

dargestellt werden. Auf diese Weise erhält man aus drei Integralen des Systems zwei neue durch blosse Differentiationen; und indem man wieder diese neuen Integrale mit den ursprünglichen verbindet, im Allgemeinen das ganze System von Integralen, welches das System erfordert.

Aber in der That ist bereits aus zwei Integralen im Allgemeinen das ganze System der Integrale durch Differentiation abzuleiten. Denn sind $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ irgend zwei gegebene Integrale, deren linke Theile die rechts vorkommenden Constanten nicht mehr enthalten, so ist nach (50.), da $(\varphi) = 0$ und $(\psi) = 0$ ist,

$$(53.) \qquad 0 = ([\varphi, \psi]) - [\varphi, \psi].$$

Aber wenn man ferner in der Gleichung (50.) $[\varphi, \psi]$ an die Stelle von ψ, ψ an die Stelle von H setzt, kommt:

$$[([\varphi, \psi]), \psi] = ([[\varphi, \psi], \psi]) - [[\varphi, \psi], \psi]$$

oder, indem man auf der linken Seite (53.) benutzt:

$$(54.) \qquad 0 = ([[\varphi, \psi], \psi]) - 2[[\varphi, \psi], \psi].$$

Multiplicirt man endlich (53.) mit $2[[\varphi, \psi], \psi]$, (54.) mit $[\varphi, \psi]$, so kann man der Differenz die Form geben:

$$\left(\frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2}\right) = 0.$$

Es ist also auch

$$\frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.}$$

ein Integral des Systems, und also auch ebenso:

$$\frac{[[\varphi, \psi], \varphi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.}$$

ein weiteres Integral. So kann man also aus zwei bekannten Integralen im Allgemeinen immer zwei weitere, und so allmälig das ganze System von Integralen ableiten.

In besonderen Fällen kann es allerdings eintreten, dass die neu gewonnenen Integrale entweder illusorisch werden, oder nur in Combinationen der ursprünglichen übergehen. In diesem Fall ist es dann nicht möglich, sämmtliche Integrale des Systems aus den gegebenen abzuleiten. Aber dann

zeigen sich häufig andere Vortheile, die man aus den gegebenen Integralen ziehen kann, indem dieselben eben dann zur Reduction des *Pfaffschen Problems* besonders geschickt sind. Ich begnüge mich hier auf diese bemerkenswerthen Verhältnisse, welche eine nähere Ausführung verdienen, hingewiesen zu haben, und fasse nur noch die oben entwickelten Resultate in folgendes Theorem zusammen:

Theorem III.

Wenn man irgend drei Integrale des ersten Pfaffschen Systems kennt,

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = \beta, \quad H = \gamma,$$

wo α, β, γ willkürliche Constante sind, welche in φ, ψ, H nicht vorkommen, so geben im Allgemeinen die Gleichungen

$$[\psi, H] : [H, \varphi] : [\varphi, \psi] = a : b : c$$

zwei neue Integrale des Systems; und durch Combination derselben mit den gegebenen kann man im Allgemeinen sämmtliche Integrale des Systems aus den gegebenen drei Integralen ableiten. Aber schon wenn zwei Integrale $\varphi = Const.$, $\psi = Const.$ gegeben sind, finden sich, freilich minder einfach, zwei neue Integrale

$$\frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.},$$

$$\frac{[[\varphi, \psi], \varphi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.},$$

und aus denselben im Verein mit den gegebenen im Allgemeinen alle Integrale des Systems.

Dieses merkwürdige und wichtige Theorem ist offenbar eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes, welchen *Poisson* in der Störungstheorie gefunden, und dessen Bedeutung *Jacobi* gewissermassen entdeckt hat, um ihn in der Dynamik zu verwerthen.

Noch vollständiger aber findet sich die Eigenschaft des dynamischen Systems wieder bei der zweiten Form von Gleichungen, auf welche die vorliegenden Untersuchungen geführt haben. Bezeichnen wir durch U eine ganz beliebige Function, und bilden den Ausdruck

$$[\varphi, U] = 0,$$

so stellt diese Gleichung eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung dar, von welcher eine Lösung bekannt ist, nämlich

$$\varphi = U.$$

Kennt man aber zwei weitere Integrale derselben, ψ und H, und benutzt man die identische Gleichung (50.) in der Form:

$$[[\psi, U], H]+[[U, H], \psi]+[[H, \psi], U] = 0,$$

welche sich der Voraussetzung gemäss auf

$$[[H, \psi], U] = 0$$

reducirt, so erkennt man, dass auch $[H, \psi]$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist; und indem man diese neue Lösung mit den ursprünglich gegebenen verbindet, um abermals neue Lösungen darzustellen, gewinnt man das folgende

Theorem IV.

Ist U eine beliebige Function, und kennt man irgend zwei Lösungen ψ, H der Gleichung

$$[\varphi, U] = 0,$$

so kann man aus diesen im Allgemeinen alle Lösungen dieser Gleichung ableiten, indem man zunächst den Ausdruck

$$[\psi, H],$$

sodann ähnlich Combinationen dieses Ausdrucks mit ψ und H bildet u. s. w.; sämmtliche Ausdrücke, welche man auf diese Weise erhält, sind Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung.

Man sieht, wie die Gleichung $[\varphi, U] = 0$ trotz ihrer sehr allgemeinen Form dennoch vollkommen denjenigen Charakter bewahrt, welchen man in dem speciellen Falle der dynamischen Gleichungen seit langer Zeit erkannt hat. Es mag genügen, an diesem Orte auf diese merkwürdigen Beziehungen hingewiesen zu haben, durch welche die bisher speciell gefassten Resultate der Dynamik mit einem sehr allgemeinen Probleme in Verbindung gesetzt werden. Aber es lässt sich auf dieselben auch eine neue und eigenthümliche Lösung des *Pfaff*schen Problems gründen, deren Darstellung der Gegenstand einer zweiten Abhandlung sein wird.

Carlsruhe, den 28. September 1860.

Die *Lamé*schen Functionen verschiedener Ordnungen.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

Die Herausgabe des Handbuches der Kugelfunctionen *), in welchem der grössere Theil der bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand zusammengestellt wurde, gab Veranlassung zu einer wiederholten Durchforschung dieses Gebietes. Schon vor Beendigung des Druckes zeigte sich, dass die Resultate des §. 90, in welchem über den Zusammenhang der *Lamé*schen Functionen erster Art E mit denen zweiter Art F gehandelt wird, richtig gedeutet (man vergl. unten III, §. 8), für diese Functionen eine Anzahl der schönsten Eigenschaften geben, welche bisher nur den speciellen Kugelfunctionen P und Q zuzukommen schienen, aber einer allgemeineren Auffassung der *Lamé*schen Functionen zur Grundlage dienen können, so dass man in ähnlicher Art von den bisherigen *Lamé*schen Functionen zu Functionen höherer Ordnung gelangen kann, wie man von den Kreisfunctionen zu den elliptischen Integralen und den *Abel*schen fortschreitet. Nur noch im Inhaltsverzeichnisse des Handbuches konnte eine Andeutung hiervon gegeben werden; was sich damals herausstellte und durch weitere Arbeiten eine bestimmtere Gestalt erhielt, bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung, — eine Fortsetzung des dritten Kapitels im zweiten Theile des erwähnten Buches.

Im Folgenden wird die dort gebrauchte Bezeichnung für alle wesentlicheren Functionen benutzt, aber bei den Buchstaben E und F die frühere Stellung der Indices, welche aus Rücksicht auf die Bequemlichkeit des Druckes gewählt war, vertauscht, so dass der früher untere Index jetzt der obere ist und umgekehrt. Eine Verweisung auf das Handbuch soll hier durch Hb. geschehen; man wird dasselbe auch da citirt finden, wo es sich nicht um Stoffe handelt, die zuerst im Hb. verarbeitet wurden.

Die *Lamé*schen Functionen $E^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$ sind, wie man weiss. (Hb. §. 80 und 90) Integrale der Differentialgleichung

$$(a.) \qquad \frac{d^2W}{du^2} - [n(n+1)x^2+z]\,W = 0.$$

*) Berlin bei Georg Reimer, 1861.

wenn man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}$$

gesetzt hat, und b, c, n positive Constante, letzteres eine ganze Zahl bezeichnet. Auch $\varkappa$ ist eine Constante, welche ausser von b und c nur noch von n abhängt. Für jedes n existiren $2n+1$ Werthe $\varkappa$, welche Wurzeln gewisser Gleichungen sind, und der Differentialgleichung (*a.*) den Charakter ertheilen, dass das eine zu dem betreffenden $\varkappa$ gehörige Integral $E^{(n)}(x)$ eine ganze Function n^{ten} Grades von x, $\sqrt{x^2-b^2}$ und $\sqrt{x^2-c^2}$ wird. (Hb. §. 79 et seq.). Dasjenige Integral, welches eine ganze Function dieser Grössen vom n^{ten} Grade ist, wurde *Lamésche Function erster Art* genannt, während dem anderen, F, welches für $x=\infty$ verschwindet, der Name *Function zweiter Art* beigelegt war. Für jedes n existiren also $(2n+1)$ Functionen erster Art E: zu jedem E gehört eine Function zweiter Art F, so dass für jedes n auch $(2n+1)$ Functionen zweiter Art auftreten. Diese Functionen E und F, sie mögen also erster oder zweiter Art sein, sollen jetzt *Lamésche Functionen der zweiten Ordnung* heissen.

Lamésche Functionen erster Ordnung werden nämlich die Integrale der Gleichung

$$(b.) \qquad \frac{d^2W}{du^2} - n^2W = 0$$

genannt, wenn man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}}$$

setzt. Macht man $b=1$ und $x=\cos\varphi$, so werden Integrale von (*b.*)

$$W=\cos n\varphi; \qquad W=\sin n\varphi,$$

ganze Functionen n^{ten} Grades von $x=\cos\varphi$ und $\sqrt{1-x^2}=\sin\varphi$. Diese Integrale mögen als *Functionen erster Art* betrachtet und deshalb wiederum durch den Buchstaben E bezeichnet werden, während F auch hier das Integral *zweiter Art* vorstellt, dasjenige nämlich, welches für $x=\infty$ verschwindet. (M. vergl. unten II.).

Wird in der Gleichung (*a.*) die Constante b gleich c, oder besser werden beide gleich 1, so verwandelt sie sich (Hb. §. 82) in die Differentialgleichung, welcher die Kugelfunctionen und ihre Zugeordneten, P^n, Q^n, P^n_m, Q^n_m genügen; die E und F zweiter Ordnung gehen also für diese speciellen Werthe der Constanten in die P und Q über. Es sind daher die Kugel-

functionen nicht Functionen von niedrigerer Ordnung als die bisher schlechtweg *Lamé*sche Functionen genannten, d. h. sie sind nicht von einer geringeren als der zweiten Ordnung, sondern *es sind die* $P(x)$ *und* $Q(x)$ *Functionen zweiter Ordnung für specielle Werthe der Constanten* b *und* c.

Functionen dritter Ordnung bildet man in ähnlicher Weise als Integrale von

$$(c.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2W}{du^2} - [n(n+2)x^4 + \varkappa_1 x^2 + \varkappa_2]\, W = 0, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}, \end{cases}$$

wenn die Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ für jedes n (durch gewisse Gleichungen) so bestimmt sind, dass je ein Integral von (*c.*), welches zu diesen Werthen von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gehört, eine ganze Function n^{ten} Grades von x und den Quadratwurzeln $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2-b^2}$, $\sqrt{x^2-c^2}$ wird. Solches Integral mag wieder Function erster Art heissen und durch E bezeichnet werden. Die Definition und Bezeichnung der Function zweiter Art für diese dritte Ordnung wählt man entsprechend den Festsetzungen für die niederen Ordnungen, d. h. die Function zweiter Art ist diejenige Lösung, welche für $x = \infty$ verschwindet, und wird durch F bezeichnet.

Functionen höherer, der $(m+1)^{\text{ten}}$ *Ordnung* beziehen sich auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2W}{du^2} - [n(n+m)x^{2m} + \varkappa_1 x^{2m-2} + \varkappa_2 x^{2m-4} + \cdots + \varkappa_m]\, W = 0,$$

wo du, den früheren Definitionen entsprechend, verallgemeinert ist, nämlich so dass $\dfrac{dx}{du}$ das Product von $(m+1)$ Quadratwurzeln $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2-b^2}$, etc. wird. Man unterscheidet auch für sie Functionen erster und zweiter Art.

Alle Functionen höherer Ordnung reduciren sich *für specielle Werthe der Constanten*, nämlich für $a = b = c = \text{etc.}$, auf einfachere Ausdrücke, die also gewissermassen als Kugelfunctionen P und Q höherer Ordnung zu betrachten sind.

Die Abhängigkeit der Functionen $E^{(n)}$ von ihrem Argumente x kann also als *Verallgemeinerung der Abhängigkeit der Function* $\cos n\varphi$ *von dem Argumente* $\cos\varphi = x$ aufgefasst werden, und zwar tritt die Art der Verallgemeinerung vorzugsweise in den Eigenschaften zu Tage, welche man bei den Cosinus der Vielfachen, also den Functionen erster Ordnung aufzufassen hat, wenn man Functionen *einer* Veränderlichen in Reihen, die nach ihnen fortschreiten, d. h. in trigonometrische Reihen entwickeln will. (Man weiss.

dass im Allgemeinen Functionen zweier Veränderlichen nach *Laméschen* Producten entwickelt werden können.) Diese beruhen auf dem Satze, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

verschwindet, wenn m und n positive ganze Zahlen vorstellen, und $n-m$ grade ist, oder dass

$$(d.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0,$$

wenn noch ausserdem $n > m$. Für die speciellen Functionen zweiter Ordnung, die P, kennt man das Entsprechende des ersten Satzes (Hb. §. 52). indem für diese

$$\int_{-1}^{1} P_p^n(x) P_p^m(x) \, dx$$

verschwindet, sobald m und n verschieden sind. Auch das Entsprechende des zweiten Satzes ist bekannt, wenn auch direct nur für die Function P_0^n im Hb. in der Formel des §. 63.

$$(e.) \quad \int_{-1}^{1} x^m P_0^n(x) \, dx = 0; \quad (m < n)$$

aufzufinden. Das Entsprechende beider Sätze wird man im Folgenden auch für die allgemeinen Functionen zweiter und höherer Ordnung entdecken; die Verallgemeinerung des ersten Satzes ist für die zweite Ordnung in der bekannten Formel (Hb. §. 88)

$$\int_0^b d\nu \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2) E_s^n(\mu) E_s^n(\nu) E_s^m(\mu) E_s^m(\nu) \, d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0$$

enthalten, die des zweiten Satzes noch nicht ausdrücklich angegeben. Beide Sätze werden unten nach einer für Functionen aller Ordnungen gleich bleibenden Methode abgeleitet.

Der Satz über das Verschwinden des Integrales (e), welches P enthält, verschafft bekanntlich als unmittelbare Folgerung die *Darstellung von* $P^n(x)$ *durch einen* n^{ten} *Differentialquotienten* (Hb. §. 63, p. 164—166); unten wird gezeigt, dass das Verschwinden des Integrales (d), welches die Function erster Ordnung $\cos n\varphi$ enthält, durch dieselben Mittel sich nur als Ausdruck der *Jacobi*schen Formel erweist, welche $\cos n\varphi$ in einen n^{ten} Differentialquotienten umgestaltet. Man wird sehen, dass ähnliche Formeln für die

Functionen aller Ordnungen existiren, die zwar noch nicht die wünschenswerthe Einfachheit besitzen, deren Ableitung aber nicht unterblieb, um zu weiterer Durchforschung einzuladen.

Seit der Arbeit von *Gauss* über mechanische Quadratur kennt man einen Satz, der $P^n(x)$ und $Q^n(x)$ in Zusammenhang mit $\log\frac{x+1}{x-1}$ bringt (Hb. §. 64). Den einfachsten Ausdruck für denselben gewinnt man, wenn man sich *den Logarithmus in einen Kettenbruch* von der Form entwickelt denkt, in welcher in der Abhandlung von *Gauss* über die hypergeometrische Reihe die Kettenbrüche für Quotienten hypergeometrischer Reihen, im speciellen Falle für solche Reihen selbst auftreten. Es ist dann $P^n(x)$ der Nenner eines Näherungswerthes des Logarithmus, $Q^n(x)$ der Rest, das Wort so genommen, wie es Hb. §. 64 geschah. Steigt man zu den Functionen erster Ordnung herab, so entdeckt man die entsprechende Beziehung zwischen den Functionen erster Art (oder $\cos n\varphi$), denen zweiter Art und *dem Kettenbruche für* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Sie ist nicht neu, sondern bereits in den allgemeinen Formeln enthalten, welche den Nenner, Zähler und Rest *der* Näherungswerthe angeben, die sich auf die *Gauss*ischen Kettenbrüche oder auf deren Verallgemeinerung beziehen; dieser specielle Fall ist übrigens in der Abhandlung, welche über jenen Gegenstand handelt *), nicht ausdrücklich hervorgehoben worden, da dort seine weitere Verfolgung kein besonderes Interesse darbot. Erhebt man sich zu den allgemeinen Functionen, so wird eine ähnliche Beziehung zunächst zwischen den Functionen E und F zweiter Ordnung erhalten, wenn man nicht $\log\frac{x+1}{x-1}$ oder $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, wie in obigen Fällen, sondern ein elliptisches Integral erster und zweiter Classe in einen Kettenbruch entwickelt. Zweckmässiger für das Folgende ausgedrückt, ist *die in einen Kettenbruch zu entwickelnde Grösse die Summe zweier ganzen elliptischen Integrale dritter Gattung*

$$\int_0^b \frac{dz}{(x^2-z^2)\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}} + \alpha\int_b^c \frac{dz}{(x^2-z^2)\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}},$$

wenn α eine gewisse Constante bezeichnet. Allgemein, bei den Functionen $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung treten in ähnlicher Art die Grössen $E^n(x)$ und $F^n(x)$ mit der Summe von $m+1$ ganzen *Abel*schen Integralen in Verbindung. Ist u dieselbe Grösse, welche sie in der oben stehenden Differentialgleichung dieser

*) Dieses Journal, Bd. 57: Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen.

Functionen darstellt, und verwandelt sich u in U, wenn man x mit z vertauscht, so ist *die Grösse, welche in einen Kettenbruch entwickelt werden muss,* für die Functionen $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\int_0^a \frac{dU}{(x-z)} + \alpha \int_a^b \frac{dU}{(x-z)} + \beta \int_b^c \frac{dU}{(x-z)} + \cdots,$$

wenn α, β, etc. gewisse Constante vorstellen.

Diese Resultate werden in der Abhandlung abgeleitet. *Der erste Abschnitt* giebt einen allgemeinen Satz über lineare Differentialgleichungen, der noch weiterer Ausdehnung fähig, aber nur in der Allgemeinheit abgeleitet ist, welche unser Zweck erfordert. Dieser Satz ist das Fundament des Ganzen und die übrigen Theile der Arbeit enthalten im Wesentlichen nichts anderes als die Deutung des allgemeinen Resultates in speciellen Fällen, nämlich bei den Differentialgleichungen für die *Lamé*schen Functionen. *Der zweite Abschnitt* erläutert die Methode an den Functionen erster Ordnung; der *dritte Abschnitt* giebt die Theorie der Functionen zweiter Ordnung, während der *vierte Abschnitt,* nicht viel mehr als eine Wiederholung der früheren Methode, sich kurz mit der dritten Ordnung beschäftigt, und nur Hindeutungen enthält, die genügen werden, um zu zeigen, dass bei den höheren Ordnungen sich Alles in gleicher Weise gestaltet. Dieser Abschnitt wird noch weiterer Bearbeitung bedürfen, indem man noch nicht mit hinreichender Klarheit das Detail bei den Functionen von der dritten und höheren Ordnung übersieht. So war ich z. B. bisher noch nicht im Stande, bei gegebenem n genau die Anzahl der Functionen $E^n(x)$ in diesen höheren Ordnungen anzugeben.

Es lag nahe, die neu gewonnenen Functionen in ähnlicher Art auf die Integration partieller Differentialgleichungen anzuwenden, wie es bis jetzt mit den allgemeinen und speciellen Functionen zweiter Ordnung geschah. Dieser Theil meiner Untersuchungen soll in einer anderen Arbeit ausgeführt werden, wenn er erst sorgfältiger durchforscht und die Möglichkeit gewisser Entwicklungen, welche bisher vorausgesetzt werden musste, bewiesen ist. Auch aus ihm scheint hervorzugehen, dass die jetzige Eintheilung und Erweiterung der *Lamé*schen Functionen eine sachgemässe ist. Ueber den Inhalt dieses zweiten Theiles soll hier vorläufig noch Folgendes bemerkt werden:

In den Ausdruck

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}},$$

welcher bekanntlich der Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}=0$$

genügt, setze man

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi_2, & a &= \varrho\cos\theta_2,\\ y &= r\sin\varphi_2\cos\varphi_1, & b &= \varrho\sin\theta_2\cos\theta_1,\\ z &= r\sin\varphi_2\sin\varphi_1, & c &= \varrho\sin\theta_2\sin\theta_1. \end{aligned}$$

Dann verwandelt sich T in eine andere Form; entwickelt man es in dieser nach aufsteigenden Potenzen von r, so hat man als Coefficienten von $\frac{r^n}{\varrho^{n+1}}$ das Glied $P^n(v)$, wo

$$v = \cos\varphi_2\cos\theta_2+\sin\varphi_2\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\theta_1)$$

gesetzt ist. Die Grösse $P^n(v)$ lässt sich, wie man weiss (Hb. §. 67) in eine Reihe von Gliedern entwickeln, die nach θ und φ symmetrisch sind. Jedes Glied ist, wenn man der Kürze halber nur beachtet, wie die φ vorkommen, ein Product aus zwei speciellen *Laméschen* Functionen; die eine von ihnen hängt von φ_2 ab, ist von der zweiten Ordnung, also eine Kugelfunction, und gehört zu n, während der andere Factor, welcher von φ_1 abhängt, nur auf die erste Ordnung steigt, also $\cos m\varphi_1$ oder $\sin m\varphi_1$ ist, und in den verschiedenen Gliedern zu 0, 1, 2, etc., endlich zu n gehört.

Setzt man in

$$T=\frac{1}{\left(\sqrt{(x-a)^2+\cdots+(x_3-a_3)^2}\right)^2},$$

welches bekanntlich der Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=0$$

genügt,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi_3, & a &= \varrho\cos\theta_3,\\ x_1 &= r\sin\varphi_3\cos\varphi_2, & &\text{etc.},\\ x_2 &= r\sin\varphi_3\sin\varphi_2\cos\varphi_1,\\ x_3 &= r\sin\varphi_3\sin\varphi_2\sin\varphi_1, \end{aligned}$$

so führt die Entwickelung von T nach Potenzen von r auf ein Aggregat als Coefficienten von r^n, welches dem früheren $P^n(v)$ entspricht, und sich in eine ähnliche Form bringen lässt wie $P^n(v)$. Es ist dieses Aggregat wieder symmetrisch nach φ und θ, und zerfällt in Glieder, die φ in drei Factoren enthalten. Jeder dieser Factoren ist nämlich eine specielle Function; der erste, eine Function dritter Ordnung von φ_3, gehört zu n; der zweite, eine Function

zweiter Ordnnng von φ_2, gehört successive zu 0, 1, 2, ... n; der dritte, eine Function erster Ordnung von φ_1, gehört ebenso der Reihe nach zu 0, 1, 2, ... n.

Man wird das bisher Gesagte leicht auf die Entwickelung von

$$T = \frac{1}{\left(\sqrt{(x-a)^2+\cdots+(x_{n+1}-a_{n+1})^2}\right)^n}$$

übertragen.

Führt man statt der obigen Coordinaten φ_1, φ_2 elliptische z_1, z_2 ein (Hb. §. 76), so wird $P^n(v)$ ein Aggregat von Gliedern (Hb. §. 91), deren jedes z_1 und z_2 in der Verbindung $E^n(z_1)E^n(z_2)$ enthält, wo die E beide dieselben allgemeinen Functionen zweiter Ordnung sind. In dem nächst complicirteren Falle wird durch Einführung ähnlicher Coordinaten z_1, z_2, z_3 die Grösse, welche $P^n(v)$ entspricht, z in der Verbindung $E^n(z_1)E^n(z_2)E^n(z_3)$ enthalten, wenn alle drei Functionen E dieselben von der dritten Ordnung vorstellen, — allerdings unter der noch unbewiesenen Voraussetzung, dass eine hinreichende Anzahl verschiedener E^n in dieser Ordnung existirt. Für den allgemeinsten Fall ist das Resultat ohne weitere Hinzufügung zu übersehen.

Indem wir nun zur Ableitung der oben erwähnten Resultate übergehen, wollen wir, um vollständige Symmetrie für die verschiedenen Fälle zu erzielen, die Differentialgleichungen (*a.*) bis (*c.*) nicht in der aufgestellten Form sondern in derjenigen betrachten, welche sie annehmen, wenn die Grössen du im Nenner nicht ein Product von Quadratwurzeln wie $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2-b^2}$, etc. sondern wie $\sqrt{x-\alpha}$, $\sqrt{x-\beta}$ enthalten. Durch bekannte einfache Substitutionen wird man immer von der einen Form auf die andere kommen können.

I. Ueber lineare Differentialgleichungen.

§. 1. Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung, um unsere Untersuchungen nicht zu weit auszudehnen, nur von der zweiten Ordnung:

$$(1.) \qquad \psi(x)\frac{d^2U}{dx^2}+\chi(x)\frac{dU}{dx}+\vartheta(x)U = 0.$$

Es sollen hier $\psi(x)$, $\chi(x)$ und $\vartheta(x)$ ganze Functionen von x vorstellen, und $f(x)$ *ein* Integral von (1.) bezeichnen; wir beschäftigen uns mit der Darstellung eines zweiten Integrales derselben Gleichung.

Setzt man $\frac{1}{x-z}=v$, so wird $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial z}$, und man erhält sofort

$$\psi(x)\frac{d^2v}{dx^2}+\chi(x)\frac{dv}{dx}+\vartheta(x)v = \psi(x)\frac{d^2v}{dz^2}-\chi(x)\frac{dv}{dz}+\vartheta(x)v.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $f(z)$ und integrire, vorläufig unbestimmt, nach z; setzt man noch zur Abkürzung

$$J = \int v f(z)\,dz = \int \frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

so wird dann die linke Seite

$$(a.) \;=\; \psi(x)\frac{d^2J}{dx^2} + \chi(x)\frac{dJ}{dx} + \vartheta(x)J,$$

und die ihr gleiche rechte, nachdem man durch Theile integrirt hat,

$$\psi(x)\left[f(z)\frac{dv}{dz} - v f'(z)\right] - \chi(x) f(z) v$$
$$+ \int [\psi(x) f''(z) + \chi(x) f'(z) + \vartheta(x) f(z)]\, v\, dz.$$

Unter dem Integrale setze man für $\psi(x)$, $\chi(x)$ und $\vartheta(x)$ resp. $[\psi(x)-\psi(z)]+\psi(z)$, $[\chi(x)-\chi(z)]+\chi(z)$ und $[\vartheta(x)-\vartheta(z)]+\vartheta(z)$; berücksichtigt man den Umstand, dass $f(x)$ eine Lösung von (1.) ist, so verwandelt sich dann das Integral in

$$\int [(\psi(x)-\psi(z)) f''(z) + (\chi(x)-\chi(z)) f'(z) + (\vartheta(x)-\vartheta(z)) f(z)]\, v\, dz.$$

Wiederholte Integration durch Theile verändert vorstehenden Ausdruck in

$$(\psi(x)-\psi(z))\, v f'(z) - f(z)\frac{d}{dz}\cdot[(\psi(x)-\psi(z))\, v] + (\chi(x)-\chi(z))\, v f(x)$$
$$+ \int f(z)\left[\frac{d^2}{dz^2}\cdot\left[\frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z}\right] - \frac{d}{dz}\cdot\left[\frac{\chi(x)-\chi(z)}{x-z}\right] + \frac{\vartheta(x)-\vartheta(z)}{x-z}\right] dz,$$

so dass, wenn man Alles vereinigt, $(a.)$ gleich einem von der Integration freien Theile

$$(b.) \;=\; -\left[v f'(z)\psi(z) - f(z)\frac{d}{dz}\cdot[v\psi(z)] + v\chi(z) f(z)\right],$$

vermehrt um das Integral

$$\int \Psi f(z)\, dz$$

wird, wo zur Abkürzung

$$\Psi \;=\; \frac{d^2}{dz^2}\cdot\left[\frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z}\right] - \frac{d}{dz}\cdot\left[\frac{\chi(x)-\chi(z)}{x-z}\right] + \left[\frac{\vartheta(x)-\vartheta(z)}{x-z}\right]$$

gesetzt ist, *so dass Ψ eine ganze Function von x und z bezeichnet.* Der Ausdruck $(b.)$ lässt sich übrigens noch in

$$-(b.) \;=\; \left(\frac{\psi(z)}{x-z}\right)^2 \frac{d}{dz}\cdot\left[\frac{(x-z) f(z)}{\psi(z)}\right] + \frac{\chi(z) f(z)}{(x-z)}$$

zusammenziehen. Wir haben also die Gleichung

$$(c.) \qquad (a.) \;=\; (b.) + \int \Psi f(z)\, dz.$$

§. 2. Wählt man für die Integration nach z solche Grenzen x_1 und x_2, für welche die Grösse $(b.)$ verschwindet, so vereinfacht sich die Gleichung $(c.)$ zu

$$(a.) = \int_{x_1}^{x_2} \Psi f(z)\, dz,$$

wenn x_1 und x_2 von x unabhängige Werthe bezeichnen. Vollständiger ausgedrückt wird also dann

$$J_0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(z)}{x-z}\, dz$$

der Differentialgleichung

$$\psi(x)\frac{d^2 J_0}{dx^2} + \chi(x)\frac{dJ_0}{dx} + \vartheta(x) J_0 = \int_{x_1}^{x_2} \Psi f(z)\, dz$$

genügen. *Wir untersuchen nun die Beschaffenheit solcher von x unabhängigen Werthe x_1, x_2,* etc. *die für z gesetzt $(b.)$ verschwinden lassen.*

Soll $(b.)$ für einen festen Werth x_1 von z, und zwar bei jedem Werthe der in $(b.)$ vorkommenden Grösse x (unabhängig von x) verschwinden, so ist erforderlich und hinreichend, dass die zwei Gleichungen, in welche $(b.) = 0$ zerfällt, erfüllt werden

$$(\alpha.) \qquad \psi(x_1) f(x_1) = 0,$$

$$(\beta.) \qquad f'(x_1)\psi(x_1) - f(x_1)\psi'(x_1) + \chi(x_1) f(x_1) = 0.$$

Diese können nur von solchen Grössen x_1 erfüllt werden, welche Wurzeln von $\psi(x) = 0$ sind. Es verschwindet nämlich wegen $(\alpha.)$ entweder $f(x_1)$ oder $\psi(x_1)$ oder beide zugleich. Verschwindet $f(x_1)$ allein, nicht auch $\psi(x_1)$, so wird zwar $(\alpha.)$ erfüllt, aber $(\beta.)$ verlangt, dass auch $f'(x_1)$ verschwindet. Aus (1.) folgt dann unmittelbar, dass auch $f''(x_1)$ Null wird, und indem man (1.) mehrere Male nach x differentiirt, dass jeder Differentialquotient von $f(x)$ für $x = x_1$ verschwindet, was unmöglich ist.

Liegt die Differentialgleichung (1.) vor, und kennt man ausserdem $f(x)$ oder wenigstens $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f(x_2)$, etc. (in den meisten Fällen genügt eine ungefähre Kenntniss), so wird man nun durch $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ erfahren, welche Werthe, also welche Wurzeln von $\psi(x)$, die Grösse $(b.)$ zu Null machen. Wir fragen aber, um in die Natur des Gegenstandes einzudringen, allgemein *wie die Functionen χ und ϑ beschaffen sein müssen, um $(b.)$ verschwinden zu lassen,* wenn für z, wegen des soeben gefundenen Satzes, nur Wurzeln von $\psi(x) = 0$ gesetzt werden, oder, was dasselbe ist, damit eine Wurzel x_1 von $\psi(x) = 0$ die Gleichungen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ erfülle. Zunächst ist klar, dass

es hierbei nicht auf ϑ sondern nur auf χ ankommen wird. Wir betrachten den Hauptfall, in welchem $\psi(x)$ keine gleichen Wurzeln hat.

Es können zunächst Wurzeln r von $\psi(x)$ auftreten, für welche $f(x)$ weder verschwindet noch unendlich wird. Aus (β.) folgt, dass solche nur und immer die verlangte Eigenschaft besitzen, so oft für sie die Gleichung besteht

$$\chi(r) = \psi'(r),$$

wenn man nur annimmt, dass $f'(x)$ für $x=r$ gar nicht unendlich wird oder wenigstens mit $(x-r)$ multiplicirt für $x=r$ verschwindet.

Es können ferner Wurzeln q von $\psi(x)$ auftreten, für welche $f(x)$ verschwindet; es mag $f(x)$ wie $(x-q)^m$ für $x=q$ verschwinden, d. h. gleich $(x-q)^m G(x)$ sein, wo $G(q)$ weder verschwindet noch unendlich ist. Auch $(x-q)G'(x)$ soll für $x=q$ verschwinden. Dann folgt aus (β.) die Gleichung

$$\chi(q) = (1-m)\psi'(q).$$

Macht endlich die Wurzel p von $\psi(x)$ die Function $f(x)$ unendlich wie $(x-p)^{-m}$, d. h. ist $(x-q)^m f(x)$ für $x=q$ endlich und nicht Null, so setze man $f(x)=(x-p)^{-m}G(x)$ und findet aus (β.)

$$\chi(p) = (1+m)\psi'(p).$$

Um für die späteren Anwendungen unnütze Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir von hier an nur den Fall betrachten, der allein für uns von Wichtigkeit ist, in dem $m=\frac{1}{2}$ ist, in denen also die Wurzeln von $\psi(x)=0$, die $f(x)$ zu 0 oder ∞ machen, dieses thun wie eine Quadratwurzel.

Kommen Wurzeln von allen drei Arten in $\psi(x)$ vor, zerfällt also $\psi(x)$ in das Product dreier ganzen Functionen $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, so dass die Wurzeln der ersten wie oben p beschaffen sind, d. h. $f(x)$ wie eine Quadratwurzel unendlich machen, die von $\psi_2(x)$ dagegen $f(x)$ wie eine Quadratwurzel verschwinden lassen, für die Wurzeln von $\psi_3(x)$ zuletzt $f(x)$ endlich und von Null verschieden bleibt, so verschwindet daher (b.) nur und immer für alle z, welche Wurzeln von $\psi(x)$ sind, wenn $\chi(x)$ die Form hat:

$$(\gamma.)\quad \begin{cases} \chi(x) = \sqrt{\dfrac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}}\dfrac{d}{dx}\cdot[\psi_3(x)\sqrt{\psi_2(x)}(\sqrt{\psi_1(x)})^3] \\ \qquad = \psi(x)\dfrac{d}{dx}\cdot\log[\psi_3(x)\sqrt{\psi_2(x)}(\sqrt{\psi_1(x)})^3], \end{cases}$$

oder dieses vermehrt um $\psi(x)$ mal einer beliebigen ganzen Function von x. Da die rechte Seite von (γ.) eine ganze Function von niedrigerem Grade als

$\psi(x)$ ist, so wird sie zugleich die einzige Function $\chi(x)$ sein, die von niedrigerem Grade als $\psi(x)$ ist und für sämmtliche z, welche Wurzeln von $\psi(x)=0$ sind, den Ausdruck $(b.)$ zu Null macht, wenn über die Lösung f nur vorausgesetzt ist, dass sie in der oben angegebenen Art 0 oder ∞ werden soll. Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit Gleichungen, in denen $\chi(x)$ die Form $(\gamma.)$ besitzt, und wo es noch nicht diese Form hat, reduciren wir die vorgelegte Gleichung durch eine geeignete Substitution auf diese Form.

Anmerkung 1. Man hätte allgemeinere Resultate gefunden, wenn man am Anfange des §. 1 mit der Grösse $(x-z)^\alpha$ ebenso operirt hätte, wie es dort mit $v=\frac{1}{x-z}$ geschah. Im §. 2 hätte man dann zu den constanten Grenzen x_1, x_2, etc. noch die veränderliche Grenze x hinzufügen können.

Anmerkung 2. Der Fall, in welchem $\psi(x)$ gleiche Wurzeln besitzt, lässt sich auf den früheren zurückführen. Ist $x=r$ eine $m$fache Wurzel von $\psi(x)$, und $f(r)$ weder 0 noch ∞, ist auch $f'(r)$ nicht ∞, so folgt aus $(\beta.)$, dass $(b.)$ nur dann für $z=r$ verschwinden kann, wenn $\chi(x)$ die Wurzel $x=r$ $m-1$mal enthält, also aus (1.), dass auch $\vartheta(x)$ diese Wurzel $m-1$mal enthalten muss. Die Gleichung (1.) wird also nach Division durch $(x-r)^{m-1}$ auf den früheren Fall zurückgeführt. War $x=q$ eine $m$fache Wurzel von $\psi(x)$, für welche auch $f(x)$ verschwindet, und ist dies von der Form

$$f(x) = (x-q)^\mu G(x),$$

wo $G(q)$ nicht verschwindet und nicht unendlich wird, so kann man statt der Differentialgleichung (1.) die für $G(x)$ betrachten, die leicht zu bilden ist, und in der q die Rolle spielt, welche so eben r zukam. Aehnlich verhält es sich mit Wurzeln, die den Charakter der p tragen.

§. 3. Die Gleichung (1.) lässt sich durch eine lineare Verbindung von Ausdrücken wie J_0 integriren, wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, der Grad von ϑ wenigstens um zwei Einheiten geringer ist als der von ψ.

Es sei $\psi(x)$ vom $m+2^{\text{ten}}$ Grade, also $\chi(x)$ und $\vartheta(x)$ resp. vom (höchstens) $m+1^{\text{ten}}$ und m^{ten}; es ist dann Ψ nach x und z vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade. Die Wurzeln von $\psi(x)$, die wir uns (s. oben) sämmtlich verschieden denken, mögen x_1, x_2, ... x_{m+2} heissen.

Man ordne Ψ nach Potenzen von z in die Reihe

$$\Psi = a^{(0)}+a'z+a''z^2+\cdots+a^{(m-1)}z^{m-1},$$

in welcher die a von z unabhängige Grössen, die aber noch ganze Potenzen von x enthalten, bezeichnen. Setzt man nun für jeden ganzen Index p und

q von $p=0$ bis $p=m$ und von $q=0$ bis $q=m-1$ (In z^q ist q Exponent, nicht Index)

$$J_p=\int_{x_{p+1}}^{x_{p+2}}\frac{f(z)\,dz}{x-z};\qquad \mathfrak{c}_p^{(q)}=\int_{x_{p+1}}^{x_{p+2}}z^q f(z)\,dz,$$

wodurch also J_p eine Function von x allein, jedes $\mathfrak{c}$ eine Constante wird, so hat man ein System von Gleichungen

$$\psi(x)\frac{d^2J_p}{dx^2}+\chi(x)\frac{dJ_p}{dx}+\vartheta(x)J_p=a^0\mathfrak{c}_p^0+a'\mathfrak{c}_p'+a''\mathfrak{c}_p''+\cdots+a^{(m-1)}\mathfrak{c}_p^{(m-1)},$$

und zwar im Ganzen $m+1$ Gleichungen, weil p so viele Werthe annimmt. Man bezeichne nun die Determinanten eines Systemes, welches aus

$$\begin{array}{cccc}\mathfrak{c}_0^0 & \mathfrak{c}_0' & \cdots & \mathfrak{c}_0^{(m-1)}\\ \mathfrak{c}_1^0 & \mathfrak{c}_1' & \cdots & \mathfrak{c}_1^{(m-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathfrak{c}_m^0 & \mathfrak{c}_m' & \cdots & \mathfrak{c}_m^{(m-1)}\end{array}$$

durch Fortlassen resp. der ersten, zweiten, etc. letzten Horizontalreihe gebildet werden, mit den üblichen Vorzeichen, durch C_0, C_1, ... C_m; dann wird bekanntlich für jeden Index q

$$\mathfrak{c}_0^qC_0+\mathfrak{c}_1^qC_1+\cdots+\mathfrak{c}_m^qC_m=0,$$

also

$$(2.)\qquad U=C_0J_0+C_1J_1+\cdots+C_mJ_m$$

ein Integral von (1.). Sollte $f(x)$ für $x=\infty$ nicht verschwinden, so wird man, wenn $f(x)$ in den Integrationsgrenzen x_1 bis x_{m+2} nicht unendlich wird, sicher ein von $f(x)$ verschiedenes Integral erhalten haben, da jedes J für $x=\infty$ verschwindet.

Die Determinanten C lassen sich übrigens ziemlich einfach ausdrücken. Setzt man zur Erleichterung der Darstellung in diesem Paragraphen fest, dass eine Veränderliche z, nach der von x_{p+1} bis x_{p+2} integrirt wird, z_p heisse, so wird der obige Werth von $\mathfrak{c}_p^{(q)}$ sich also auch

$$\mathfrak{c}_p^{(q)}=\int(z_p)^qf(z_p)\,dz_p$$

schreiben lassen. Bekanntlich ist die Determinante

$$\begin{vmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{m-1}\\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & z_m & z_m^2 & \cdots & z_m^{m-1}\end{vmatrix}$$

gleich dem Producte

$$\begin{array}{r}(z_2-z_1)(z_3-z_1)\dots(z_m-z_1)\\ (z_3-z_2)\dots(z_m-z_2)\\ \dots\dots\dots\dots\\ (z_m-z_{m-1}),\end{array}$$

welches Π_0 heissen mag, weil in ihm z nicht mit dem unteren Index 0 versehen ist, während das entsprechende Product, dem der untere Index p fehlt, statt dessen der Index 0 eintritt, Π_p sei. Alsdann hat man

$$C_p = \int \Pi_p . f(z_0) f(z_1) \dots f(z_m)\, dz_0\, dz_1 \dots dz_m ,$$

wenn unter dem vorstehenden $m$fachen Integrale sowohl $f(z_p)$ als auch dz_p fehlt.

Setzt man diese Ausdrücke in (2.) ein, und macht

$$\begin{array}{rl}\Pi = & (z_1-z_0)(z_2-z_0)\dots(z_m-z_0)\\ & (z_2-z_1)\dots(z_m-z_1)\\ & \dots\dots\dots\dots\\ & (z_m-z_{m-1}),\end{array}$$

so ändert sich (2.) *schliesslich,* nach sehr einfachen Sätzen über Zerlegung in Partialbrüche, *in*

$$(2.^*) \qquad U = \int \frac{\Pi . f(z_0) f(z_1) \dots f(z_m)}{(x-z_0)(x-z_1)\dots(x-z_m)}\, dz_0\, dz_1 \dots dz_m$$

um, wo das Integral jetzt $m+1$fach ist, und kein Index von 0 bis m incl. unter dem Integrale fehlt.

§. 4. In den folgenden Abschnitten sieht man an den besonderen Fällen der Gleichung (1.), die dort behandelt werden, wie bequem der Ausdruck (2.) ist, um aus ihm die Eigenschaften der Lösungen von (1.) zu erkennen. An der gegenwärtigen Stelle soll unsere Integrationsmethode noch einmal ins Auge gefasst werden, um bekannte Resultate durch dieselbe zu beleuchten.

Man kennt schon lange ein Mittel, um ein zweites Integral einer linearen Differentialgleichung wie (1.) durch eine Integration aus einem bekannten Integrale $f(x)$ aufzufinden (Hb. §. 31). Durch dieses ergiebt sich als zweites Integral von (1.), vorausgesetzt dass man für $\chi(x)$ seinen Werth (γ.) aus §. 2 gesetzt hat,

$$U = f(x) \int \frac{dx}{(f(x))^2 \psi_3(x) \sqrt{\psi_2(x)} \left(\sqrt{\psi_1(x)}\right)^3} .$$

Man erhält also eine lineare Relation zwischen diesem Werthe von U, wenn

man das Integral von einem geeigneten Werthe von x an nimmt, und dem Ausdrucke (2.).

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich an der allgemeineren Gleichung

$$(\delta.) \qquad \psi(x)\frac{d^2V}{dx^2}+\chi(x)\frac{dV}{dx}+\theta(x)V=(b.)+\int\Psi f(z)\,dz$$

anstellen, wo $(b.)$ und Ψ die Bedeutung des §. 1 hat. Ein Integral derselben ist

$$V=\int\frac{f(x)\,dz}{x-z};$$

andererseits lässt sich ihr Integral aus zwei Integralen der Gleichung (1.), also aus $f(x)$ und dem Werthe (2.) auf ganz bekannte Art darstellen. Man erhält so eine Gleichung zwischen den beiden gleichen und nur in der Form verschiedenen Lösungen von $(\delta.)$.

Um die Bedeutung der auf diese Art erhaltenen Beziehung aufzuklären, soll diese Betrachtung hier auf Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen werden; sie liefert dann einen bekannten, sehr folgenreichen Satz von *Abel*. Durch die Methode des §. 1 sieht man ein, dass, wenn $f(x)$ ein Integral der Gleichung

$$\psi(x)\frac{dU}{dx}+\tfrac{1}{2}\psi'(x)U=0$$

bezeichnet, also z. B. $f(x)=(\psi(x))^{-\frac{1}{2}}$ ist, dass alsdann

$$J=\int\frac{f(z)\,dz}{(x-z)}$$

der Gleichung

$$(\varepsilon.) \qquad \psi(x)\frac{dJ}{dx}+\tfrac{1}{2}\psi'(x)J=-\frac{\psi(z)f(z)}{x-z}+\int\Psi f(z)\,dz$$

genügt, wo

$$\Psi=-\frac{d}{dz}\cdot\left[\frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z}\right]+\tfrac{1}{2}\frac{\psi'(x)-\psi'(z)}{x-z}$$

gesetzt, also ein Aggregat von Gliedern

$$\Psi=\Sigma b\,x^p z^q$$

ist, wenn die b Constante bezeichnen, die allerdings von Glied zu Glied, d. h. für verschiedene p und q verschieden sein können. Andererseits findet man durch bekannte Methoden auf der Stelle das Integral von $(\varepsilon.)$ in anderer Form. Heisst nämlich die rechte Seite von $(\varepsilon.)$ für den Augenblick η, so liefert die übliche Integrationsmethode das Integral von $(\varepsilon.)$

$$J=\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}\int\frac{\eta\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Berücksichtigt man noch, dass $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}$ ist, so erhält man durch Gleichsetzen beider Ausdrücke von J

$$(\zeta.)\quad \sqrt{\psi(x)}\int\frac{dx}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}+\sqrt{\psi(z)}\int\frac{dx}{(x-z)\sqrt{\psi(x)}} = \Sigma b\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}\int\frac{z^q\,dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

Nur die Ableitung dieses Satzes nach der obigen Methode möchte ungewöhnlich sein; über die Grenzen der Integration ist den üblichen Betrachtungen nichts hinzuzufügen.

Beispiel. Wegen der späteren Anwendungen soll der Fall ausgeführt werden, in dem

$$\psi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

also $\psi(x)$ ein Ausdruck dritten Grades ist. Es seien α, β, γ reelle Constanten, und $\alpha<\beta<\gamma$. Alsdann ist $\Psi = \frac{x}{2}-\frac{z}{2}$, also die rechte Seite von $(\zeta.)$

$$= \tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

Nimmt man die Integrale nach z zwischen den bestimmten Grenzen α und β, das nach x von γ an und denkt sich $x>\beta$, so wird schliesslich

$$2\sqrt{\psi(x)}\int_\alpha^\beta\frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} = \int_\alpha^\beta\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}\int_\gamma\frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}-\int_\gamma\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}\int_\alpha^\beta\frac{z\,dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

M. vergl. über die Wahl der Grenzen*) *Weierstrass*, Beitrag zur Theorie der *Abel*schen Integrale §. 1 und §. 2, Braunsberg, 1849.

II. Die Laméschen Functionen erster Ordnung.

§. 1. Es mögen α und β, damit Weitläufigkeit bei Bestimmung der Vorzeichen vermieden werde, *reelle* Constanten bezeichnen, von denen α die kleinere ist; x sei eine reell gedachte Veränderliche. Man setze

$$\psi(x) = (x-\alpha)(x-\beta);\qquad du = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

und denke sich $\sqrt{\psi(x)}$ positiv reell oder imaginär, d. h. im letzten Falle gleich $i$mal einer positiven reellen Grösse. Unter diesen Voraussetzungen wird hier

*) Man sieht dort, wie aus vorstehender Formel die bekannte

$$\int_\beta^\gamma\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}\int_\alpha^\beta(x-z)\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = -2\pi i$$

sich ergiebt. Aus $(\varepsilon.)$ werde ich gelegentlich den *Abel*schen Satz beweisen.

von den Integralen der Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2W}{du^2} - \frac{n^2}{4} W = 0$$

gehandelt, wenn n eine ganze positive Zahl vorstellt.

Man sieht, dass die vorstehende Gleichung sich nur unwesentlich von (*b.*) in der Einleitung unterscheidet. Von (1.) kann man auf doppelte Art auf (*b.*) kommen: erstens kann man in (1.) die Substitution $\sqrt{x-\alpha} = z$, $\beta-\alpha = b^2$ machen, wodurch du sich in $\frac{2\,dz}{\sqrt{z^2-b^2}}$ verwandelt, also nach Vertauschung von z mit x die Gleichung (1.) in (*b.*) umgeändert wird. Man sieht hieraus zugleich, dass (1.) nicht allgemeiner ist als (*b.*); ja sogar könnte man ohne wesentliche Beschränkung $b = 1$ machen. Zweitens kommt man aber auch von (1.) auf (*b.*), wenn man $\beta = -\alpha = b$, und $2n$ für n setzt, woraus man schon ersieht, dass eine einfache Beziehung zwischen den Integralen von (1.) vorhanden ist, die zu n und denen, welche zu $2n$ gehören.

Die Gleichung (1.) lässt sich auch in der Form

$$\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\psi'(x)\frac{dW}{dx} - \frac{n^2}{4} W = 0$$

schreiben.

§. 2. Man findet auf der Stelle zwei particuläre Integrale *) von (1.), nämlich

$$(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta})^n; \qquad (\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{x-\beta})^n,$$

oder

$$(a.) \qquad (A+B)^n, \qquad (A-B)^n,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$A = \sqrt{x-\alpha}, \qquad B = \sqrt{x-\beta}.$$

Durch Combination dieser particulären Integrale können andere von neuen Formen erzeugt werden. Wir heben zwei von ihnen hervor

$$(b.) \qquad \frac{(A+B)^n+(A-B)^n}{2(\sqrt{\beta-\alpha})^n}; \qquad \frac{(A+B)^n-(A-B)^n}{2(\sqrt{\beta-\alpha})^n},$$

die also, wenn man

$$\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\beta-\alpha}\,.\cos\varphi$$

setzt, resp. in $\cos n\varphi$ und $i\sin n\varphi$ übergehen. (Wäre $\alpha=-1$, $\beta=1$, $x=\cos 2\varphi$ gesetzt, so würden diese Integrale gleichfalls $\cos n\varphi$ und $i\sin n\varphi$ sein).

---

*) Ist die Nummer des Abschnittes der Nummer der Gleichung oder des Paragraphen nicht hinzugefügt, so bezieht sich das Citat immer auf den laufenden Abschnitt.

Wir können also zwei Functionen von x angeben, welche (1.) genügen, zugleich ganze Functionen n^{ten} Grades von A und B sind, und die (bis auf einen constanten Factor) vollständig durch Hinzufügung der Bedingung charakterisirt werden, dass jede von ihnen entweder eine rationale Function von x, oder A mal einer solchen, oder B mal einer solchen, oder AB mal einer solchen ist. Dass diese Bedingungen zur Bestimmung wirklich ausreichen, übersieht man sogleich, wenn man sich der üblichen Methoden zur Entwickelung der Lösungen solcher Differentialgleichungen in Reihen erinnert; eine wirkliche Ausführung der Entwickelung, die ganz bekannte Reihen giebt, ist nicht erforderlich.

Die so definirten Functionen sollen zu n gehörige Lamésche Functionen erster Ordnung, genauer noch auch erster Art (s. §. 3) heissen. Auf die bestimmte Festsetzung der multiplicirenden Constanten kommt es in der Theorie nicht an; der Bequemlichkeit halber wählen wir sie genau so, wie (*b.*) es vorschreibt. Das Functionszeichen für diese Ausdrücke sei $E^n(x)$ oder $E^n(x)$ auch schlechtweg $E(x)$ oder E.

Hier wie im Folgenden *wird eine ganze Function einer Grösse z vom m^{ten} Grade durch $G(z, m)$ oder $G(m)$ bezeichnet.* Derselbe Buchstabe G kann in derselben Rechnung verschiedene ganze Functionen vorstellen, und bezieht sich eben nur auf den erwähnten Charakter der Function. Ist es nöthig, die Verschiedenheit hervorzuheben, so erhält G untere Indices. Ferner sei für ein grades n, $\frac{n}{2} = \sigma$, für ein ungrades, $\frac{n-1}{2} = \sigma$.

Wir sahen, dass zu jedem n zwei Functionen E, sie seien E_1^n und E_2^n, gehören. Man hat offenbar *für ein grades n*

$$E_1^n(x) = G(\sigma, x); \quad E_2^n(x) = ABG(\sigma-1, x); \quad \left(\sigma = \frac{n}{2}\right),$$

für ein ungrades n

$$E_1^n(x) = AG(\sigma, x); \quad E_2^n(x) = BG(\sigma, x); \quad \left(\sigma = \frac{n-1}{2}\right).$$

§. 3. Durch E_1^n und E_2^n ist (1.) vollständig integrirt; man kann auch die Ausdrücke §. 2., (*a.*) als Lösungen derselben ansehen. Der eine von ihnen, $(A-B)^n$ unterscheidet sich wesentlich von den anderen dadurch, dass er für $x = \infty$ verschwindet, und erst mit $x^{\frac{n}{2}}$ multiplicirt

$$= x^{\frac{n}{2}}(A-B)^n = \left(\frac{(\beta-\alpha)\sqrt{x}}{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}\right)^n$$

für $x = \infty$ endlich, nämlich $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^n$ wird. Man schöpft hieraus den Satz, dass jede Lösung von (1.), die für $x = \infty$ verschwindet, mit ihm übereinstimmt, und mit jeder Potenz von x, die niedriger als die $\frac{n^{te}}{2}$ ist, multiplicirt für $x = \infty$ verschwindet. Eine solche Lösung heisst *Lamésche* Function (erster Ordnung) *zweiter Art*. Sie wird durch den Buchstaben F bezeichnet, indem man

$$F^n(x) = \left(\frac{A-B}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^n$$

setzt, so dass $x^{\frac{n}{2}} F^n(x)$ für $x = \infty$ in $\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}\right)^n$ übergeht.

§. 4. Die Gleichung (1.) ist also für jedes n durch irgend zwei von den drei Functionen E_1^n, E_2^n, F^n, vollständig integrirt. Um Eigenschaften dieser zu entwickeln, bringen wir sie durch die Methode des I. Abschnittes mit einander in Verbindung.

Es sei zuerst n grade; alsdann ist $E_1^n(x)$, oder kurz $E_1(x)$ eine Function, die für keine Wurzel α oder β von $\psi(x)$ verschwindet. Vergleicht man die Form unserer Gleichung (1.) mit der in I., so wäre $E_1(x) = f(x)$ und $\chi(x) = \frac{1}{2}\psi'(x)$ zu setzen; also hätte $\chi(x)$ eine Gestalt, (m. vergl. I, §. 1, (γ.)), welche die Anwendung der Methode des vorigen Abschnittes zulassen würde, wenn $E_1(x)$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ wie A und B verschwände, was, wie man sieht, nicht der Fall ist. Wir transformiren deshalb (1.) in eine andere Form, auf welche direct die Methoden von I. angewandt werden können. Den allgemeinen Gedanken, welcher dieser Transformation zu Grunde liegt, werden wir III, §. 4 näher auseinandersetzen.

Man substituire in (1.)

$$W = \sqrt{\psi(x)}.U,$$

so genügt U der Gleichung

$$(1^*.) \qquad \psi(x)\frac{d^2U}{dx^2} + \tfrac{3}{2}\psi'(x)\frac{dU}{dx} + U\left(1-\frac{n^2}{4}\right) = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$U = \frac{E_1(x)}{\sqrt{\psi(x)}},$$

welches wir $f(x)$ nennen, und nun wird $f(x)$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ wie eine Quadratwurzel, nämlich wie A^{-1} oder B^{-1}, unendlich. Es hat also jetzt $\chi(x) = \frac{3}{2}\psi'(x)$ die in I., §. 2 (γ.) geforderte Gestalt; da die Grössen ψ, χ,

$\theta = 1 - \frac{n^2}{4}$ nur vom Grade 2, 1, 0 sind, so wird $\Psi = 0$, und man findet als zweites Integral von (1 *.)

$$\int_\alpha^\beta \frac{E_1 z\, dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}},$$

welches für $x = \infty$ verschwindet, oder als zweites Integral von (1.), welches demnach bis auf einen constanten Factor k mit $F^n(x)$ übereinstimmen muss (§. 3),

$$(2.) \qquad F^n(x) = k\sqrt{\psi(x)}\int_\alpha^\beta \frac{E_1^n(z)\, dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}.$$

Ist n ungrade, so setze man $W = B.U.$ Dann wird U der Gleichung

$$\psi(x)\frac{d^2U}{dx^2} + \sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}\,\frac{d}{dx}\cdot[\sqrt{x-\alpha}\,(\sqrt{x-\beta})^3]\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{1-n^2}{4}U = 0$$

genügen. Ein Integral derselben

$$U = \frac{E_1(x)}{\sqrt{x-\beta}}$$

wird für $x = \alpha$ resp. $x = \beta$ Null oder unendlich wie $\sqrt{x-\alpha}$ oder $(x-\beta)^{-\frac{1}{2}}$. Man findet daher als zweites Integral von (1.), wenn k_1 eine gewisse Constante vorstellt,

$$(2.^*) \qquad F^n(x) = k_1\sqrt{x-\beta}\int_\alpha^\beta \frac{E_1^n(z)\, dz}{(x-z)\sqrt{z-\beta}}.$$

§. 5. Da $F(x)$ nach §. 3. für $x = \infty$ erst mit $x^{\frac{n}{2}}$ multiplicirt für $x = \infty$ endlich bleibt, so giebt die Entwickelung der Integrale in (2.) nach absteigenden Potenzen von x das Resultat:

Bedeutet m eine ganze positive Zahl, die kleiner als σ ist $\left(\sigma = \frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$, *so hat man resp. für grade oder ungrade n die Gleichung*

$$(3.) \qquad \int_\alpha^\beta z^m E_1^n(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = 0; \quad \int_\alpha^\beta z^m E_1^n(z)\frac{dz}{\sqrt{z-\beta}} = 0.$$

Zur Bestimmung der Constanten k und k_1 in (2.) dient ferner (§. 3), dass diese Integrale, mit k oder k_1 multiplicirt, für $m = \sigma$ den Werth $\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}\right)^n$ geben müssen.

Um bequemer die Bedeutung dieser Gleichungen übersehen zu können, setze man, was offenbar in Folge der Ableitung gestattet ist (man hätte ja am Anfange des §. 5 nur nach absteigenden Potenzen von $(x-\alpha)$ zu entwickeln brauchen), in den Integralen $(z-\alpha)^m$ für z^m, und mache dann (§. 2)

$$\sqrt{z-\alpha} = \sqrt{\beta-\alpha}.\cos\varphi,$$
$$\sqrt{z-\beta} = i\sqrt{\beta-\alpha}.\sin\varphi,$$

wodurch die verschwindenden Integrale resp.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi,$$

werden, das erste grade, das zweite ungrade n betreffend. Ferner folgt aus dem Falle $m = \sigma$

$$k = k_1 = \frac{i}{\pi},$$

wodurch die Constanten in (2.) bestimmt sind. Aus §. 3. weiss man, dass diese Integrale im Wesentlichen nichts anderes als $(\sqrt{x-\alpha} - \sqrt{x-\beta})^n$ vorstellen.

§. 6. Die Gleichungen (3.), welche unmittelbar aus (1.) sich ergaben, verschafften die erste wichtige Folgerung, welche schon im Vorwort erwähnt war und hier gedeutet ist. Die Darstellung der E durch wiederholte Differentiation, also *Jacobis* Formel für $\cos n\varphi$ (Hb. §. 36), lässt sich gleichfalls in (3.) lesen. Um dies zu zeigen, benutzen wir die bekannte Gleichung

$$(a.) \quad \Pi(\nu-1)\int_a^x \varphi(x)\,dx^\nu = x^{\nu-1}\int_a^x \varphi(x)\,dx - \frac{\nu-1}{1} x^{\nu-2}\int_a^x x\varphi(x)\,dx$$
$$+ \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2} x^{\nu-3}\int_a^x x^2\varphi(x)\,dx - \cdots \pm \int_a^x x^{\nu-1}\varphi(x)\,dx,$$

in der $\varphi(x)$ eine beliebige Function, ν eine positive ganze Zahl, $\Pi(\nu-1)$ das *Gauss*ische Zeichen vorstellt, und bei dem νfachen Integrale links jede Integration von a an genommen wird.

Ist eine Reihe von Integralen

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx, \quad \int_a^x x\varphi(x)\,dx, \quad \ldots \quad \int_a^x x^{\sigma-1}\varphi(x)\,dx$$

gleich Null, so verschwindet daher jedes $m$fache Integral $\int_a^x \varphi(x)\,dx^{m+1}$ von $m = 0$ bis $m = \sigma-1$. Auf unsere Integrale (3.) angewandt, und zwar zunächst auf das erste derselben (für *grade* n geltende), zeigt (*a.*), dass

$$\int_a^x \frac{E_1^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx^\sigma$$

und seine $\sigma-1$ ersten Differentialquotienten nach x für $x = \beta$ verschwinden. Heisst jenes Integral $\mathfrak{F}(x)$, so hat man daher

$$\mathfrak{F}(\beta) = \mathfrak{F}'(\beta) = \text{etc.} = \mathfrak{F}^{\sigma-1}(\beta) = 0$$
$$\sqrt{\psi(x)}\,\mathfrak{F}^\sigma(x) = E_1^n(x).$$

Es ist ohne weiteres klar, dass man diesen Gleichungen noch

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}'(\alpha) = \text{etc.} = \mathfrak{F}^{\sigma-1}(\alpha) = 0$$

hinzufügen kann.

Die neue Form von E_1 ergiebt sich aus unseren Beziehungen, sobald man die ungefähre Gestalt von $\mathfrak{F}$ kennt, die man aus (*a.*) ersieht. Es ist nämlich $\mathfrak{F}(x)$ ein Aggregat von Gliedern, deren jedes das Product einer Potenz $x^{\sigma-1-m}$ mal einem Integrale von $\frac{E(x).x^m}{\sqrt{\psi(x)}}$ oder von $\frac{G(\sigma+m,x)}{\sqrt{\psi(x)}}$ ist. Ein solches unbestimmt ausgeführt hat bekanntlich die Form

$$\sqrt{\psi(x)}.G(\sigma+m-1)+G(0)\int\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

so dass $\mathfrak{F}(x)$ selbst die Form

$$\sqrt{\psi(x)}\,G(n-2)+G(\sigma-1)\int\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

besitzt. Da noch der $\sigma-1^{\text{te}}$ Differentialquotient von $\mathfrak{F}$ für $x=\beta$ verschwindet, also der Factor des Integrals, $G(\sigma-1)$, Null sein muss (E enthält nämlich in seinen Constanten keine Transcendente, also auch $G(n-2)$ und $G(\sigma-1)$ keine solche; die Transcendente $\int_a^\beta\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$ kann aber nicht bei allgemein bleibenden α und β gleich einer rationalen Grösse sein), so wird

$$\mathfrak{F}(x) = \sqrt{\psi(x)}.G(n-2,x).$$

Berücksichtigt man die Bedingungen über das Verschwinden von $\mathfrak{F}(x)$ und seiner Differentialquotienten, und bezeichnet durch c eine gewisse Constante, so sieht man, dass

$$G(n-2,x) = c(x-\alpha)^{\sigma-1}(x-\beta)^{\sigma-1}$$

wird, also

$$(4.)\qquad E_1^n(x) = c\sqrt{\psi(x)}\,\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}\left(\psi(x)^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Bei der Bestimmung der Constanten c, die sich sofort durch Vergleichung beider Seiten von (4.) ergiebt, verweilen wir nicht länger.

Als *Jacobi*s Formel erweist sich diese am bequemsten, wenn $\alpha=-1$, $\beta=1$, $x=\cos\varphi$, und $2n$ für n gesetzt wird. Dann hat man

$$\cos n\varphi = c\sqrt{x^2-1}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}};\quad (x=\cos\varphi),$$

welches der erwähnte Ausdruck ist.

Für *ungrade n* gestaltet die Rechnung sich folgendermassen: Setzt man

$$\mathfrak{F}(x) = \int_\alpha^x E_1^n(x) \frac{dx^\sigma}{\sqrt{x-\beta}},$$

so bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{F}(\beta) = \mathfrak{F}'(\beta) = \cdots = \mathfrak{F}^{\sigma-1}(\beta) = 0,$$
$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}'(\alpha) = \cdots = \mathfrak{F}^{\sigma-1}(\alpha) = \mathfrak{F}^\sigma(\alpha) = 0,$$

ferner $E_1^n(x) = \sqrt{x-\beta}\,\mathfrak{F}^\sigma(x)$. Da nun

$$\frac{E_1^n(x)}{\sqrt{x-\beta}} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\beta}} G(\sigma, x) = \frac{G(\sigma+1)}{\sqrt{\psi(x)}},$$

so hat $\mathfrak{F}(x)$ die Form

$$\mathfrak{F}(x) = \sqrt{\psi(x)}\, G(n-2).$$

Aus den vorstehenden Bedingungen folgt aber, dass

$$G(n-2) = c(\psi(x))^{\sigma-1}(x-\alpha)$$

sei, oder endlich

$$(4^*.) \qquad E_1^n(x) = c\sqrt{x-\beta}\,\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}\left[(x-\alpha)^{\frac{n}{2}}(x-\beta)^{\frac{n}{2}-1}\right],$$

wenn wiederum c eine leicht zu bestimmende Constante vorstellt.

§. 7. Während die Gleichungen (2.) benutzt waren, um Eigenschaften der E aufzustellen oder andere Formen für diese Functionen anzugeben, wobei man ebenso gut hätte E_2 zu Grunde legen können, statt, wie es oben geschah, von E_1 auszugehen, soll jetzt aus (2.) eine Beziehung zwischen E und F entwickelt werden. Setzt man $[E(z)-E(x)]+E(x)$ für $E(z)$, so findet man aus (2.) für *grade n*

$$\frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}} - kiG^n(x) = kE_1^n(x)\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}},$$

wo $G^n(x)$ eine ganze Function $\sigma-1^{\text{ten}}$ Grades von x bezeichnet, nämlich

$$G^n(x) = \int_\alpha^\beta \frac{E_1^n(x)-E_1^n(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung lässt sich ausführen und giebt $-\frac{\pi i}{\sqrt{\psi(x)}}$, so dass man erhält, wenn man noch für k seinen Werth $\frac{i}{\pi}$ setzt,

$$(5.) \qquad \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} E_1^n(x) = \frac{1}{\pi} G^n(x) + \frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Es sind also die Ausdrücke, resp. σ^{ten}, $\sigma-1^{\text{ten}}$, $-(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grades,

$$E_1^n(x), \quad \frac{1}{\pi} G^n(x), \quad \frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}},$$

bis auf einen constanten Factor, Nenner, Zähler und Rest (das Wort im Sinne des Hb., I. Theil, sechstes Kapitel p. 166 genommen) des Kettenbruches, in den man $\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}$ entwickeln kann. In der That lässt sich $\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}$ in einen Kettenbruch umformen

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} = \cfrac{1}{x-\frac{\alpha+\beta}{2}-\cfrac{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}{2x-\alpha-\beta-\cfrac{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}{2x-\alpha-\beta-\text{etc.}}}},$$

dessen m^{ter} Näherungswerth (Hb. p. 160) einen Nenner vom Grade m hat, der mit $2^{m-1}x^m$ beginnt, während der Zähler nur auf den $m-1^{\text{ten}}$ Grad steigt. Der oben erwähnte constante Factor, mit dem man E_1, etc. multipliciren muss, um den Nenner, etc. zu erhalten, erweist sich daher, durch Vergleichung der höchsten Potenzen von x in den Ausdrücken für E und dem Nenner, als $(\sqrt{\beta-\alpha})^n$.

Setzt man $\alpha=-1$, $\beta=1$, so erhält man hieraus die Resultate für den Kettenbruch von $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, welche aus den allgemeinen folgen würden, die sich in diesem Journale Bd. 57 für die *Gauss*ische und die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe finden.

Aehnliche Resultate erhält man für *ungrade n*, wenn man in (2*.) für $E(z)$ setzt $\sqrt{z-\alpha}E(z):\sqrt{z-\alpha}$. Berücksichtigt man, dass $\sqrt{z-\alpha}E(z)$ nun eine ganze Function von z vom Grade $\sigma+1$ und gleich

$$[\sqrt{z-\alpha}\,E(z)-\sqrt{x-\alpha}\,E(x)]+\sqrt{x-\alpha}\,E(x)$$

ist, so ergiebt sich

$$(5^*.) \qquad \sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}\cdot\frac{E_1^n(x)}{\sqrt{x-\alpha}} = \frac{1}{\pi}G^n(x)+\frac{F^n(x)}{\sqrt{x-\beta}},$$

so dass die ganzen Functionen σ^{ten} Grades $\frac{E_1^n(x)}{\sqrt{x-\alpha}}$, $\frac{1}{\pi}G^n(x)$, und die Function $-(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grades $\frac{F^n(x)}{\sqrt{x-\beta}}$ sich auf den Kettenbruch

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\beta-\alpha}{x-\alpha+\sqrt{\psi(x)}}}$$

beziehen.

§. 8. Ist E irgend eine Function erster Art von x, D eine andere ihr gleichartige, so dass D und E denselben unteren Index (1 oder 2) besitzen, während ihre oberen Indices sich um eine grade Zahl unterscheiden, so findet man durch ein häufig angewandtes Verfahren aus der Differentialgleichung (1.)

$$\int_{\alpha}^{\beta} DE \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = 0,$$

während

$$\int_{\alpha}^{\beta} EE \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

eine sicher von Null verschiedene, übrigens leicht zu bestimmende Constante wird, nämlich $-\frac{\pi}{2} i$ oder $\frac{\pi}{2} i$, je nachdem die E den unteren Index 1 oder 2 besitzen.

Dieser Satz dient, wie ohne weitere Erörterung klar sein wird, zur Bestimmung der Coefficienten bei Entwickelungen einer Function nach *Lamé*schen Functionen erster Gattung, die mit den durch *Dirichlet*s Arbeiten bekannten Beschränkungen erlaubt ist, da sie ja einer Entwickelung nach Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Winkels φ gleichkommt. Um das Letztere klarer darzulegen, fügen wir noch Folgendes hinzu:

Eine Function η von A und B, welche sich nach E_1 mit graden oberen Indices n entwickeln lässt, hat die Eigenschaft

$$(\alpha.) \qquad \eta(A, B) = \eta(-A, B) = \eta(A, -B);$$

lässt sich η_1 nach E_2 mit graden n entwickeln, so wird

$$(\beta.) \qquad \eta_1(A, B) = -\eta_1(-A, B) = -\eta_1(A, -B).$$

Sind η_2 und η_3 Functionen, die sich resp. nach E_1 oder E_2 mit ungraden n entwickeln lassen, so wird

$$(\gamma.) \qquad \eta_2(A, B) = -\eta_2(-A, B) = \eta_2(A, -B),$$
$$(\delta.) \qquad \eta_3(A, B) = \eta_3(-A, B) = -\eta_3(A, -B).$$

Setzt man nun, wie §. 2, $\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\beta-\alpha}.\cos\varphi$ und $\sqrt{x-\beta} = i\sqrt{\beta-\alpha}.\sin\varphi$, so verwandeln die Functionen η sich in Functionen ψ von φ, die resp. folgende Eigenschaften besitzen:

$$\psi(\varphi) = \psi(\pi-\varphi) = \psi(-\varphi),$$
$$\psi_1(\varphi) = -\psi_1(\pi-\varphi) = -\psi_1(-\varphi),$$
$$\psi_2(\varphi) = -\psi_2(\pi-\varphi) = \psi_2(-\varphi),$$
$$\psi_3(\varphi) = \psi_3(\pi-\varphi) = -\psi_3(\varphi).$$

Aus den bekannten Sätzen über die Entwickelung beliebiger Functionen, welche willkürlich von $\varphi = -\pi$ bis $\varphi = \pi$ gegeben sind, in trigonometrische Reihen folgt aber unmittelbar, dass die Functionen ψ, die nur von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ willkürlich gegeben sind, aber die vorstehenden Eigenschaften besitzen, sich immer in Reihen entwickeln lassen, deren allgemeine (m^{te}) Glieder resp.

$$a_{2m}\cos 2m\varphi, \quad a_{2m}\sin 2m\varphi, \quad a_{2m+1}\cos(2m+1)\varphi, \quad a_{2m+1}\sin(2m+1)\varphi$$

sind, wenn die a gewisse Constante vorstellen. Geht man auf die η zurück, d. h. auf Functionen, welche nur durch die Eigenschaften $(\alpha.)$ bis $(\delta.)$ erklärt sind, so lassen sich η, η_1, η_2 und η_3 daher immer durch Reihen darstellen, deren m^{te} Glieder resp. die Formen besitzen

$$a_{2m}E_1^{2m}, \quad a_{2m}E_2^{2m}, \quad a_{2m+1}E_1^{2m+1}, \quad a_{2m+1}E_2^{2m+1}.$$

Es kann aber jede Function ϑ von A und B in eine Summe aus vier Theilen zerlegt werden, welche die Eigenschaften der η haben und daher nach den E entwickelt werden können. Man hat nämlich

$$\vartheta = \eta + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$

wenn gesetzt ist

$$\begin{aligned}
4\eta &= \vartheta(A,B)+\vartheta(-A,B)+\vartheta(A,-B)+\vartheta(-A,-B),\\
4\eta_1 &= \vartheta(A,B)-\vartheta(-A,B)-\vartheta(A,-B)+\vartheta(-A,-B),\\
4\eta_2 &= \vartheta(A,B)-\vartheta(-A,B)+\vartheta(A,-B)-\vartheta(-A,-B),\\
4\eta_3 &= \vartheta(A,B)+\vartheta(-A,B)-\vartheta(A,-B)-\vartheta(-A,-B).
\end{aligned}$$

III. Die Laméschen Functionen zweiter Ordnung.

§. 1. Nach der Methode, welche im vorhergehenden Abschnitte ausführlich erläutert wurde, behandeln wir eine complicirtere Differentialgleichung. Zunächst wollen wir einige Bezeichnungen zusammenstellen, die ähnlichen im vorhergehenden Abschnitte entsprechend hier benutzt werden.

Es bezeichnen α, β, γ Constante, die wir der Bequemlichkeit halber reell annehmen. Es sei nun

$$\alpha < \beta < \gamma, \quad \sqrt{x-\alpha} = A, \quad \sqrt{x-\beta} = B, \quad \sqrt{x-\gamma} = C,$$

$$\psi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - C_1 x^2 + C_2 x - C_3.$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}, \qquad \mathrm{H}_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

$$\omega_m = \int_\alpha^\beta \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}, \qquad \eta_m = \int_\beta^\gamma \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}; \quad \sigma = \frac{n}{2}, \quad \frac{n-1}{2},$$

nämlich $\sigma = \frac{n}{2}$, wenn n grade ist, sonst $\frac{n-1}{2}$. Sämmtliche Quadratwurzeln werden positiv genommen, sie mögen reell oder imaginär sein (II, §. 1). Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir hier die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2W}{du^2} - [n(n+1)x + kC_1]\frac{W}{4} = 0,$$

in der n eine positive ganze Zahl, k gewisse Constante vorstellt (S. u. §. 2).

Setzt man

$$\sqrt{x-\alpha} = z, \quad \beta-\alpha = b^2, \quad \gamma-\alpha = c^2,$$

so wird

$$du = \pm \frac{2\,dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}},$$

so dass (1.) die Form von (*a.*) in der Einleitung annimmt, also die Gleichung wird, welche Hb. II. Theil, 3tes und 4tes Kapitel ausführlich behandelt wurde. Die Gleichung (1.) lässt sich auch so schreiben:

$$\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\psi'(x)\frac{dW}{dx} - [n(n+1)x + kC_1]\frac{W}{4} = 0.$$

§. 2. Um Wiederholungen zu vermeiden werden dem Hb. §. 81—86 folgende Eigenschaften der Gleichung (1.) entnommen, die dort zwar für die Form (*a.*) der Einleitung erwiesen sind, aber durch die Substitution des §. 1 sich unmittelbar auf unsere Form (1.) übertragen lassen:

Es können für jedes n der Constanten k im Ganzen $(2n+1)$ verschiedene Werthe ertheilt werden, die reelle Wurzeln gewisser höheren Gleichungen sind, und welche der Gleichung (1.) die Eigenschaft verleihen, dass je eine Lösung von (1.) eine ganze Function n^{ten} Grades von A, B, C ist. Noch genauer wird das im Hb. gewonnene Resultat durch folgendes Schema ausgedrückt:

	1, n grade		2, n ungrade	
K	$G(\sigma, x)$	$(\sigma+1)$	$AG(\sigma, x)$	$(\sigma+1)$
L	$ABG(\sigma-1, x)$	(σ)	$BG(\sigma, x)$	$(\sigma+1)$
M	$ACG(\sigma-1, x)$	(σ)	$CG(\sigma, x)$	$(\sigma+1)$
N	$BCG(\sigma-1, x)$	(σ)	$ABCG(\sigma-1, x)$	(σ)

Man wird hierin die Gleichungen (57.) Hb. §. 81 erkennen. Die erste Columne des Schemas zeigt an, welcher Klasse K, L etc. von *Lamé*'schen Functionen im Hb., vermöge der Substitutionen im §. 1, die Functionen entsprechen, deren Form in der mit dem betreffenden Buchstaben beginnenden Horizontalreihe

angegeben ist. In der dritten und fünften Verticalreihe findet man, wie viele Werthe k annimmt, also auch wie viele Functionen der danebenstehenden Form man erhält. Da sämmtliche k, welche für ein gegebenes n ein und dieselbe Klasse liefern, Wurzeln einer gewissen Gleichung sind, so kennt man zu gleicher Zeit den Grad dieser Gleichungen. Bis jetzt kann man sie nicht zerlegen, doch ist ihre Irreductibilität noch nicht bewiesen. Wäre sie gezeigt, so würde man unten einige Beweise abkürzen können.

Diese je $2n+1$ Lösungen von (1.), die bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt sind, heissen *Functionen zweiter Ordnung und erster Art*, sind aber wesentlich nichts anderes als die *Laméschen* Functionen erster Art des Hb. Man unterscheidet vier Klassen (Zeilen) für jedes n; wir bezeichnen sie sämmtlich durch das Functionszeichen E, wie die von geringerer Ordnung in den früheren Abschnitten.

Die durch G bezeichneten ganzen Functionen im Schema verschwinden nicht für $x = \alpha, \beta, \gamma$ (Hb. §. 87, p. 229). Wir ordnen sie nach absteigenden x*), und nennen die in ihnen vorkommenden constanten Factoren der Reihe nach g_0, g_1, g_2, etc. Nach dem Obigen bleibt noch eine dieser Constanten, z. B. g_0 willkürlich; im Hb. ist sie, allerdings ohne Nothwendigkeit, aber sehr bequem für die Fälle, bei welchen es sich um Entwickelungen nach den E handelt, bis auf das Zeichen, welches man positiv nehmen mag, durch eine Festsetzung bestimmt, welche in unserer Bezeichnung sagt, dass sie reell sei, und dass

$$2\int_{\beta}^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \int_{\alpha}^{\beta} (x-z)\,(E(x)\,E(z))^2 \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

den Zahlwerth 1 haben soll, wenn $E(x)$ irgend eine bestimmte dieser Functionen von x, $E(z)$ dieselbe von z bezeichnet.

Bekanntlich sind

$$\frac{g_1}{g}, \quad \frac{g_2}{g}, \quad \frac{g_3}{g}, \quad \text{etc.}$$

ganze Functionen resp. vom ersten, zweiten, dritten etc. Grade der jedes-

*) Um die Reihen zu erhalten, welche im Hb. gegeben sind, müsste man nach Potenzen von $(x-\alpha)$ ordnen. Es bleibt noch unentschieden, ob es nicht zweckmässiger sei, sowohl hier als bei den Functionen höherer Ordnung, nach einfachen Verbindungen von A, B, etc. zu entwickeln. Im Hb. fehlt leider eine erst zu spät bemerkte Art der Entwickelung, nämlich nach Potenzen von

$$r = \frac{\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{x^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

vermöge welcher man die Betrachtungen des §. 92 hätte bedeutend abkürzen können.

maligen Constanten k; wir zeigen hier gelegentlich, dass diese Festsetzung in die verschiedenen g selbst, keine andere neue Transcendenten als π einführt. Hierzu bedient man sich der bekannten Formel

$$2x^m\sqrt{\psi(x)} = (2m+3)\,\mathrm{H}_{m+2} - 2(m+1)\,C_1\mathrm{H}_{m+1} + (2m+1)\,C_2\mathrm{H}_m - 2m\,C_3\mathrm{H}_{m-1},$$

aus welcher folgt

$$\int_\alpha^\beta G(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = C\omega + D\omega_1, \qquad \int_\alpha^\beta z\,G(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi(x)}} = H\omega + L\omega_1,$$

$$\int_\beta^\gamma G(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = C\eta + D\eta_1, \qquad \int_\beta^\gamma x\,G(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = H\eta + L\eta_1,$$

wenn G eine beliebige ganze Function von x vorstellt, und C, D, H, L Constante bezeichnen, die nur solche Irrationalitäten enthalten, welche schon in α, β, γ und in den Coefficienten von $G(x)$ vorkommen, und zwar ist das Integral eine lineare Function dieser Coefficienten. Es wird dann

$$\int_\beta^\gamma \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}\int_\alpha^\beta (x-z)\,G(x)\,G(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = (HD-LC)(\eta\omega_1-\omega\eta_1)$$

oder (m. vergl. den Schluss von I.) gleich $2\pi i(HD-CL)$, so dass also durch die Integration keine andere neue Transcendente als π hinzukommt. Setzt man nun

$$G(x) = (E(x)\,E(z))^2,$$

also $G(x)$ gleich einer rationalen homogenen Function der Coefficienten g_m vom vierten Grade, so zerfällt die linke Seite in ein Product von $g_0^4\pi$ mal einer ganzen Function von Quotienten

$$\frac{g_1}{g_0}, \quad \frac{g_2}{g_0}, \quad \frac{g_3}{g_0}, \quad \text{etc.},$$

d. h. mal einer ganzen Function der Constanten k, so dass also die Festsetzung über die Constante g_0 in die Coefficienten g_m nur eine vierte Wurzel aus π und einer ganzen Function von k, keine neue Transcendente einführt. Die g enthalten also, abgesehen von π, keine Transcendente, welche nicht in k oder in α, β, γ vorkommt.

Im Folgenden soll diese Bestimmung von g_0, um eine lästige Weitläufigkeit im Ausdrucke zu vermeiden, *aufgehoben, und* $g_0 = 1$ *gesetzt werden, so dass die* g *rational nach* k *und* α, β, γ *sind.*

Schliesslich stellen wir die Gleichungen auf, welche zwischen den Coefficienten g bestehen, begnügen uns aber hierbei mit *einem* Falle. Es wird der Fall eines E der ersten Klasse (Zeile) mit gradem n herausge-

nommen. Dann hat, wie aus dem Schema ersichtlich ist, E die Form

$$E^n(x) = g_0 x^\sigma + g_1 x^{\sigma-1} + g_2 x^{\sigma-2} + \cdots + g_\sigma;$$

setzt man diesen Ausdruck in (1.) ein, so erhält man ein System Gleichungen von $m = \sigma$ bis $m = 0$

$$(2m+2)(2m+4)C_3 g_{\sigma-m-2} - (2m+1)(2m+2)C_2 g_{\sigma-m-1} + [(2m)^2 + k]C_1 g_{\sigma-m} + (n-2m+2)(n+2m-1)g_{\sigma+1-m} = 0.$$

Die ersten sind demnach (wir lassen alle drei C allgemein, obgleich man durch eine lineare Substitution für x, C_3 zu Null machen, und so Gleichungen erhalten könnte, die nur je drei g enthalten):

$$0 = [n^2 + k]C_1 g_0 + 2(2n-1)g_1,$$
$$0 = -n(n-1)C_2 g_0 + [(n-2)^2 + k]C_1 g_1 + 4(2n-3)g_2,$$
$$0 = n(n-2)C_3 g_0 - (n-2)(n-3)C_2 g_1 + [(n-4)^2 + k]C_1 g_2 + 6(2n-5)g_3;$$

die letzten:

$$0 = 4.6C_3 g_{\sigma-3} - 3.4C_2 g_{\sigma-2} + [4+k]C_1 g_{\sigma-1} + n(n+1)g_\sigma,$$
$$0 = \qquad 2.4C_3 g_{\sigma-2} - 1.2C_2 g_{\sigma-1} + kC_1 g_\sigma.$$

Vertikal untereinander stehen in dem System im Allgemeinen vier Glieder; z. B. sind die, welche mit $g_{\sigma-m}$ multiplicirt sind:

$$(n-2m)(n+2m+1), \quad ((2m)^2+k)C_1, \quad -2m(2m-1)C_2, \quad 2m(2m-2)C_3.$$

§. 3. Um für jedes k die Gleichung (1.) vollständig zu integriren, nimmt man noch eine zweite Lösung zu Hülfe, welche die *Lamésche Function zweiter Ordnung und zweiter Art* heisst, und durch das Functionszeichen F eingeführt wird. Als Reihe, die nach Potenzen von x absteigt, beginnt sie mit der $-\frac{n+1}{2}^{\text{ten}}$ Potenz von x, und verschwindet daher für $x = \infty$. Dadurch ist diese Function bis auf einen constanten Factor bestimmt, über den, entsprechend Hb. §. 90, p. 239, festgesetzt werden soll, dass

$$\sqrt{x}\, E^n(x) F^n(x) = \frac{2}{2n+1}$$

für $x = \infty$ sei, wenn E^n und F^n zwei zusammengehörige Functionen sind, d. h. solche, die zu demselben n und zugleich zu demselben Werthe von k gehören.

Verschwindet eine Lösung von (1.) für $x = \infty$, so ist diese also eine Function zweiter Art, und sie kann daher erst mit $x^{\frac{n+1}{2}}$ multiplicirt, für $x = \infty$ endlich bleiben; dann wird sie aber $\frac{2}{2n+1}$.

§. 4. Nach denselben Grundsätzen wie in II, §. 4 soll nun eine zweite Lösung von (1.) mit Zugrundelegung der Lösung E ermittelt werden.

Die Gleichung (1.) hat zwar wiederum die Form der Gleichung (1.) im I. Abschnitte, wenn nur $\chi(x) = \frac{1}{2}\psi'(x)$ ist; um aber die Schlüsse von I, §. 2 zu gestatten, müsste die erste Lösung $E^n(x)$ für alle x, die Wurzeln von $\psi(x)$ sind, wie eine gewisse Quadratwurzel verschwinden, also für dieselben zunächst überhaupt verschwinden, was nicht für alle Classen (Zeilen) der E stattfindet (§. 2). Wir zerlegen deshalb $\psi(x)$ in das Product zweier ganzen Functionen

$$\psi(x) = \psi_1(x)\psi_2(x),$$

wo $\psi_1(x)$ die linearen Factoren von $\psi(x)$ enthält, welche, gleich Null gesetzt, einen Werth von x geben, für welchen $E(x)$ nicht verschwindet, $\psi_2(x)$ die anderen. Ist z. B. n grade und k so beschaffen, dass die eine Lösung eine Function zweiter Classe (Zeile), also von der Form $ABG(\sigma-1, x)$ wird, so setzt man

$$\psi_1(x) = (x-\gamma);\ \psi_2(x) = (x-\alpha)(x-\beta).$$

Indem wir zum allgemeinen Falle zurückkehren, setzen wir nun in (1.)

$$W = \sqrt{\psi_1(x)}.U$$

und finden eine Gleichung nach U von der Form I, (1.), deren eines Integral

$$U = \frac{E^n(x)}{\sqrt{\psi_1(x)}} = f(x)$$

für alle x, die Wurzeln von $\psi_1(x)$ sind, unendlich wird, für alle Wurzeln von $\psi_2(x)$ verschwindet. Heisst die Gleichung

$$(a.) \qquad \psi(x)\frac{d^2U}{dx^2} + \chi(x)\frac{dU}{dx} + \theta(x)U = 0,$$

so wird jetzt

$$\chi(x) = \tfrac{1}{2}\psi'(x) + \psi_1'(x)\psi_2(x) = \sqrt{\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}}\frac{d}{dx}\cdot[\sqrt{\psi_2(x)}(\sqrt{\psi_1(x)})^3],$$

$$4\theta(x) = \psi_1'(x)\psi_2'(x) + 2\psi_1''(x)\psi_2(x) - n(n+1)x - kC_1.$$

Es hat jetzt $\chi(x)$ die Form (γ.) in I, §. 2.; ferner ist die Function θ nach x vom ersten Grade, daher Ψ in I, §. 1. eine Constante c, deren Werth man sogleich hinschreiben kann, der aber vollständig gleichgültig ist, und endlich $f(x) = \frac{E^n(x)}{\sqrt{\psi_1(x)}}$. Macht man nun, um nicht gleich das Endresultat nach der allgemeinen Formel I, §. 3 hinzuschreiben, sondern dasselbe nach

der allgemeinen Methode in diesem speciellen Falle abzuleiten *),

$$J_0 = \int_\alpha^\beta \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}; \qquad J_1 = \int_\beta^\gamma \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}},$$

$$\mathfrak{c}_q = \int_\alpha^\beta z^q E^n(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}; \qquad \mathfrak{C}_q = \int_\beta^\gamma z^q E^n(z)\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}},$$

so wird die linke Seite von (*a.*), wenn man J_0 oder J_1 für U setzt, nicht 0, sondern resp. $\mathfrak{c}_0 c$ oder $\mathfrak{C}_0 c$, folglich

$$\mathfrak{c}_0 J_1 - \mathfrak{C}_0 J_0 = U$$

ein Integral von (*a.*), welches für $x=\infty$ verschwindet. Dies mit $\sqrt{\psi_1(x)}$ multiplicirt ist daher ein Integral von (1.), und kann sich nur durch einen constanten Factor $\mathfrak{k}$ von der Function zweiter Art unterscheiden. Wir haben also das Resultat:

Ist $E^n(x)$ eine zu n gehörige Function zweiter Ordnung und erster Art, und heisst der Factor von $\psi(x)$, dessen Wurzeln, für x in $E^n(x)$ gesetzt, dieses verschwinden lassen, $\psi_2(x)$, so ist die demselben k entsprechende Function zweiter Art

$$(2.) \qquad \mathfrak{k}F^n(x) = \sqrt{\psi_1(x)}\left[\mathfrak{c}_0\int_\beta^\gamma \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} - \mathfrak{C}_0\int_\alpha^\beta \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}\right].$$

Setzt man für $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{C}_0$ ihre Werthe, so lässt sich diese Formel sogleich in

$$(2.^*) \qquad \mathfrak{k}F^n(x) = \sqrt{\psi_1(x)}\int_\beta^\gamma \frac{dy}{\sqrt{\psi_1(y)}}\int_\alpha^\beta \frac{(y-z)E^n(y)E^n(z)}{(x-y)(x-z)}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}$$

zusammenziehen.

§. 5. Von den drei Constanten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{C}_0$ dienen die beiden letzteren, genauer nur ihr Verhältniss $\mathfrak{c}_0 : \mathfrak{C}_0$, also eine einzige Constante, zur Characterisirung der Function F^n; den Werth der zwei Constanten $\frac{\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{k}}$, $\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{k}}$ muss man nur dann kennen, wenn man genau diejenige Function F^n erhalten will, die durch eine willkürliche Bestimmung im §. 3 festgestellt war. Ueber die demnach wichtigsten Constanten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$ soll unten noch weiter gehandelt werden.

Es fängt $F^n(x)$, nach absteigenden Potenzen von x geordnet, mit der $-\frac{n+1^{\text{ten}}}{2}$ an $\left(\text{ist vom Grade } -\frac{n+1}{2}\right)$. Nennen wir nun ein F, welches zu

*) Wo nach I, §. 3. hätte $\mathfrak{c}^0$ und $\mathfrak{c}'$ stehen müssen, setzt man hier zur Bequemlichkeit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$.

einem E der p^{ten} Classe (Zeile) gehört, ein F dieser p^{ten} Classe, so folgt der Grad von $\frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi_1(x)}}$

1) *bei gradem* n, für die erste Klasse $=-(\sigma+2)$, für die übrigen Klassen $=-(\sigma+1)$;

2) *bei ungradem* n, für die drei ersten Klassen $=-(\sigma+2)$, für die vierte $=-(\sigma+1)$.

Bezeichnet man den jedesmaligen Grad mit $-s$, so folgt aus (2.) durch Entwickelung der rechten Seite nach absteigenden Potenzen von x *der Satz: Es ist*

$$(3.) \qquad \mathfrak{c}_0 \int_\beta^\gamma z^m E^n(z) \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} - \mathfrak{C}_0 \int_\alpha^\beta z^m E^n(z) \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} = 0$$

für alle ganzen m, *von* $m=0$ *bis* $m=s-2$; für $m=s-1$ wird aber die linke Seite

$$= \frac{2\mathfrak{f}}{(2n+1)},$$

was zur Bestimmung von $\mathfrak{f}$ dienen kann. In II, §. 5 findet man das Entsprechende dieses Satzes für die Functionen erster Ordnung.

Die Gleichung (3.) lässt sich kürzer so schreiben:

$$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{C}_m - \mathfrak{c}_m \mathfrak{C}_0 = 0; \qquad (m < s-1)$$

und zeigt, dass man die Proportion hat

$$\mathfrak{c}_0 : \mathfrak{c}_1 : \ldots : \mathfrak{c}_{s-2} = \mathfrak{C}_0 : \mathfrak{C}_1 : \ldots : \mathfrak{C}_{s-2},$$

so dass auch

$$(a.) \qquad \mathfrak{c}_p \mathfrak{C}_m - \mathfrak{c}_m \mathfrak{C}_p = 0, \qquad (m < s-1, p < s-1).$$

Als Doppelintegral geschrieben heisst dies, dass

$$\int_\beta^\gamma \frac{dy}{\sqrt{\psi_1(y)}} \int_\alpha^\beta E^n(y) E^n(z) (y^m z^p - y^p z^m) \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} = 0,$$

welcher Satz der Kern desjenigen ist, der zur Bestimmung der Coefficienten bei Entwickelungen nach *Laméschen* Producten dient. Aus ihm folgt nämlich zunächst

$$(b.) \qquad \int_\beta^\gamma \frac{dy}{\sqrt{\psi_1(y)}} \int_\alpha^\beta (f(y)\chi(z) - f(z)\chi(y)) E^n(y) E^n(z) \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} = 0,$$

wenn f und χ ganze Functionen vom höchstens $s-2^{\text{ten}}$ Grade vorstellen. Bedeuten $D(y)$ und $D(z)$ Functionen wie E, die zu einem niedrigeren aber

gleichartigen n und zu derselben Klasse gehören, so hat man nur zu setzen

$$f(y) = y\frac{D(y)}{\sqrt{\psi_2(y)}}, \qquad \chi(z) = \frac{D(z)}{\sqrt{\psi_2(z)}},$$

und findet dann den erwähnten Satz

$$(c.) \quad \int_\beta^\gamma \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} \int_\alpha^\beta (y-z) E^n(y) E^n(z) D(y) D(z) \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} = 0.$$

Der Bequemlichkeit halber werden wir im weiteren Laufe dieses Paragraphen nur eine Klasse der E betrachten. Wir nehmen deshalb n grade und nur ein E der ersten Klasse, so dass $\psi_2(x) = 1$, $\psi_1(x) = \psi(x)$, $s = \sigma + 2$.

Setzt man

$$S_m = \int x^m E^n(x) \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}},$$

so entsteht durch Multiplication von (1.) mit $\frac{x^m}{\sqrt{\psi(x)}}$ und Integration nach x, indem man durch Theile integrirt,

$$(d.) \begin{cases} \sqrt{\psi(x)}\left(m x^{m-1} E^n(x) - x^m \frac{dE^n(x)}{dx}\right) \\ = (n-2m)(n+2m+1) S_{m+1} + ((2m)^2+k) C_1 S_m - 2m(2m-1) C_2 S_{m-1} + 2m(2m-2) C_3 S_{m-2}. \end{cases}$$

Die linke Seite hat also die Form $\sqrt{\psi(x)}\, G(\sigma+m-1, x)$, und verschwindet für $x = \alpha, \beta, \gamma$, während zur selben Zeit die in diesen Grenzen genommenen Integrale S in $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{C}$ übergehen. Man hat demnach für die $\mathfrak{C}$ ein System von Gleichungen, in dem sich auch alle $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{c}$ vertauschen lassen:

$$\begin{aligned} 0 = & \quad k C_1 \mathfrak{C}_0 + n(n+1)\mathfrak{C}_1, \\ 0 = & -1.2.C_2 \mathfrak{C}_0 + (4+k) C_1 \mathfrak{C}_1 + (n-2)(n+3)\mathfrak{C}_2 = 0, \\ & \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

so dass sich alle $\mathfrak{C}$ bis $\mathfrak{C}_\sigma$ incl. durch $\mathfrak{C}_0$ ausdrücken; $\mathfrak{C}_{\sigma+1}$ lässt sich wegen des Factors $n-2m$, der S_{m+1} in der allgemeinen Formel multiplicirt, nicht bestimmen. Eine Vergleichung dieses Systems mit dem für die g am Schlusse des §. 2 zeigt, *dass die Horizontalreihen des einen Systems mit den Verticalreihen des anderen übereinstimmen.* $\mathfrak{C}_0$ ist eine rationale Function von k, die Verhältnisse $\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_0 : \mathfrak{C}_2$, etc. sind ganze Functionen von k resp. vom Grade 1, 2, etc.

Da nach $(d.)$ jedes S_m von $m = 1$ bis $m = \sigma$ sich in die Form

$$S_m = \text{const.}\, S_0 + \sqrt{\psi(x)}\, G(\sigma+m-2, x)$$

bringen lässt, so wird

$$\text{const.} = \frac{\mathfrak{C}_m}{\mathfrak{C}_0} = \frac{\mathfrak{c}_m}{\mathfrak{c}_0},$$

und man findet

$$(e.) \qquad S_m = \frac{\mathfrak{C}_m}{\mathfrak{C}_0} S_0 + \sqrt{\psi(x)}\, G(\sigma+m-2, x).$$

Anmerkung. Die Formeln (2.) und (2*.) wären illusorisch, zunächst wenn $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{C}_0$ verschwinden könnten. Dies geschieht aber nicht; denn vermöge des vorstehenden Systems würde hieraus folgen

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \cdots = \mathfrak{C}_\sigma = 0,$$
$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \cdots = \mathfrak{c}_\sigma = 0,$$

und auch jede lineare Verbindung der $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{c}$ müsste verschwinden, also auch

$$g_0\mathfrak{C}_\sigma + g_1\mathfrak{C}_{\sigma-1} + \cdots + g_\sigma\mathfrak{C}_0,$$
$$g_0\mathfrak{c}_\sigma + g_1\mathfrak{c}_{\sigma-1} + \cdots + g_\sigma\mathfrak{c}_0,$$

d. h. (wenn die g die in E vorkommenden Constanten sind)

$$\int_\beta^\gamma (E^n(y))^2 \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = 0, \quad \int_\alpha^\beta (E^n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = 0,$$

was unmöglich ist, weil die Grössen unter dem Integrale ihr Zeichen nicht ändern.

Aber auch ohne dass $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{C}_0$ verschwinden, kann (2.) und (2*.) illusorisch werden, wenn nämlich die rechte Seite von (2.) für alle x verschwindet, was also erfordert, dass für jedes ganze positive m

$$\mathfrak{c}_0\mathfrak{C}_m - \mathfrak{c}_m\mathfrak{C}_0 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_m : \mathfrak{c}_m = \mathfrak{C}_0 : \mathfrak{c}_0 = \lambda$$

sei, wo λ eine Constante vorstellt, die nicht Null ist. Dann wird

$$\int_\beta^\gamma (E^n(y))^2 \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = g_0\mathfrak{C}_\sigma + g_1\mathfrak{C}_{\sigma-1} + \cdots + g_\sigma\mathfrak{C}_0$$
$$= \lambda(g_0\mathfrak{c}_\sigma + g_1\mathfrak{c}_{\sigma-1} + \cdots + g_\sigma\mathfrak{c}_0)$$

oder gleich

$$\lambda\int_\alpha^\beta (E^n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Ebenso wird

$$\lambda\int_\alpha^\beta x(E^n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \int_\beta^\gamma y(E^n(y))^2 \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}}.$$

Die Multiplication der beiden Gleichungen, der linken mit der linken, der rechten mit der rechten Seite, giebt, wenn man durch λ dividirt, und im Resultate beide Seiten durch Subtraction auf einer vereinigt,

$$\int_\alpha^\beta\int_\beta^\gamma (y-x)(E^n(y)E^n(x))^2\, dx\, dy = 0,$$

während doch der Ausdruck, da die zu integrirende Grösse ihr Zeichen nicht ändert, sicher von Null verschieden sein muss.

Bereits in der Einleitung wurde bemerkt, *dass die Kugelfunctionen P und Q nicht von einer geringeren Ordnung als der zweiten, sondern als solche Functionen für specielle Werthe der Constanten aufzufassen sind.* Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$, und x^2 für x, so verwandelt sich in der That (1.) in die Differentialgleichung der P_m^n und Q_m^n, also E und F sich in P_m^n und Q_m^n (Hb. §. 82). Es steht zu erwarten, dass unter diesen Voraussetzungen (2.) oder, was dasselbe ist, (2*.) in die bekannte Beziehung zwischen P_m^n und Q_m^n übergehen wird (Hb. §. 59), die im Wesentlichen mit der zwischen P_0^n und Q_0^n (Hb. §. 33) übereinstimmt. Aus unseren Formeln lässt sich *direct* nur die letztere leicht entwickeln, da wir voraussetzten, die Differentialgleichung, deren zweites Integral wir aufsuchten, habe ein erstes Integral, welches nur wie die Quadratwurzel von $\sqrt{\psi(x)}$ verschwindet, während $P_m^n(x)$ bekanntlich durch die m^{te} Potenz der $\sqrt{1-x^2}$ theilbar ist. Ein solcher Fall wurde (I, §. 2, Anmerk. 2) auf den einfacheren erstgenannten *zurückgeführt.*

Kehrt man in (2*.) die Ordnung der Integrationen um, so ist das innere Integral

$$\int_\beta^\gamma \frac{(y-z)E^n(y)\,dy}{(x-y)\sqrt{\psi(y)}}.$$

Wird $\beta = \gamma$, so geht $E^n(y)$ continuirlich in eine Function über, die $\mathfrak{E}(y)$ heisse, also das Integral in das Product

$$\frac{(\beta-z)\mathfrak{E}(\beta)}{(x-\beta)\sqrt{\beta-\alpha}} \int_\beta^\gamma \frac{dy}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)}}, \qquad \text{für} \qquad \beta = \gamma.$$

Setzt man $y-\beta = (\gamma-\beta)v^2$, so verwandelt sich das Integral zwischen den Grenzen β und γ in

$$-2i\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = -\pi i,$$

also die rechte Seite von (2*.) oder das zweite Integral der Gleichung, deren erstes $\mathfrak{E}(x)$ ist, in eine Constante mal

$$\frac{\mathfrak{E}(\beta)}{\sqrt{\beta-\alpha}} \cdot \sqrt{x-\alpha} \int_\alpha^\beta \frac{\mathfrak{E}(z)\,dz}{(x-z)\sqrt{z-\alpha}}.$$

Dies ist offenbar die Relation Hb. §. 33, nach der

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P^n(y)\,dy}{x-y}$$

die zweite Lösung $Q^n(x)$ der bekannten Differentialgleichung der Kugelfunctionen wird.

Anmerkung. Es musste in dem Ausdrucke (*c.*) vorausgesetzt werden, dass D von niedrigerem als dem σ^{ten} Grade sei; man zieht aber, durch Betrachtung der Differentialgleichung (1.) in der Art des Hb. §. 88, das Resultat, dass (*c.*) noch gilt, wenn auch D von gleichem Grade mit E^n, nur nicht E^n selbst ist. Diese Eigenschaft *führt auf Gleichungen, welche die verschiedenen zu n gehörenden k verbinden.*

Um dies weiter auszuführen, bezeichne man die Coefficienten von D durch h, so dass $(h_0 = 1)$

$$D = h_0 x^\sigma + h_1 x^{\sigma-1} + \text{etc.};$$

die Constante k habe für D den Werth $\varkappa$. Trennt man nun (*c.*) in die Differenz zweier Doppelintegrale, deren erstes

$$\int_\beta^\gamma y\, D(y)\, E^n(y) \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} \int_\alpha^\beta D(z)\, E^n(z) \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

ist, und löst $D(y)$ in die Reihe auf, so entsteht

$$(h_0 \mathfrak{C}_{\sigma+1} + h_1 \mathfrak{C}_\sigma + \cdots + h_\sigma \mathfrak{C}_1)(h_0 \mathfrak{c}_\sigma + h_1 \mathfrak{c}_{\sigma-1} + \cdots + h_\sigma \mathfrak{c}_0)$$
$$-(h_0 \mathfrak{c}_{\sigma+1} + h_1 \mathfrak{c}_\sigma + \cdots + h_\sigma \mathfrak{c}_1)(h_0 \mathfrak{C}_\sigma + h_1 \mathfrak{C}_{\sigma-1} + \cdots + h_\sigma \mathfrak{C}_0)$$

gleich Null, und nur von Null verschieden, wenn alle h mit den E^n angehörigen Coefficienten g übereinstimmen. Nach (*a.*) wird aber die linke Seite

$$h_0[h_0(\mathfrak{c}_\sigma \mathfrak{C}_{\sigma+1} - \mathfrak{c}_{\sigma+1} \mathfrak{C}_\sigma) + h_1(\mathfrak{c}_{\sigma-1} \mathfrak{C}_{\sigma+1} - \mathfrak{c}_{\sigma+1} \mathfrak{C}_{\sigma-1}) + \cdots + h_\sigma(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{C}_{\sigma+1} - \mathfrak{c}_{\sigma+1} \mathfrak{C}_0)]$$

oder

$$\frac{h_0}{\mathfrak{c}_0}(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{C}_{\sigma+1} - \mathfrak{c}_{\sigma+1} \mathfrak{C}_0)$$

mal

$$h_0 \mathfrak{c}_\sigma + h_1 \mathfrak{c}_{\sigma-1} + \cdots + h_\sigma \mathfrak{c}_0.$$

Für σ Systeme von Werthen h ist daher der letzte Ausdruck gleich Null, indem der erste nicht verschwindet; die Grössen $h_0 = 1$, h_1, $\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}_0$ etc. in einem jeden Systeme lassen sich aber rational durch die jedesmaligen $\varkappa$ und k ausdrücken, woraus man eine Gleichung zwischen $\varkappa$ und k erhält. Indem man alle h gleich den g setzt, also auch $\varkappa = k$, entsteht nicht Null.

§. 6. Der Kürze halber betrachten wir auch in diesem Paragraphen nur eine Classe der E, und zwar die erste Classe für ein grades n.

Aus den Gleichungen (3.) folgt nach II, §. 6. sogleich, dass

$$\mathfrak{c}_0 \int_\beta^z E^n(z) \frac{dz^m}{\sqrt{\psi(z)}} + \mathfrak{C}_0 \int_\beta^x E^n(x) \frac{dx^m}{\sqrt{\psi(x)}}$$

für $z = \gamma$ und $x = \alpha$, und für alle ganzen m von $m = 0$ bis $m = \sigma + 1$ ver-

schwindet; für $z = x = \beta$ findet offenbar dasselbe statt. Setzt man

$$\int_\beta^z E^n(z) \frac{dz^{\sigma+1}}{\sqrt{\psi(z)}} = \varphi(z),$$

so wird also

(*a.*) $\mathfrak{c}_0\varphi(\gamma)+\mathfrak{C}_0\varphi(\alpha) = \mathfrak{c}_0\varphi'(\gamma)+\mathfrak{C}_0\varphi'(\alpha) = \text{etc.} = \mathfrak{c}_0\varphi^\sigma(\gamma)+\mathfrak{C}_0\varphi^\sigma(\alpha) = 0,$

(*b.*) $\varphi(\beta) = \varphi'(\beta) = \text{etc.} = \varphi^\sigma(\beta) = 0,$

(*c.*) $\sqrt{\psi(x)}\varphi^{\sigma+1}(x) = E^n(x).$

Andererseits findet man leicht nach II, §. 6, (*a.*) die allgemeine Form von $\varphi(x)$ (Man vergl. auch §. 5)

$$= x^\sigma S_0 - \frac{\sigma}{1} x^{\sigma-1} S_1 + \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} x^{\sigma-2} S_2 - \text{etc.},$$

wenn die S dieselbe Bedeutung wie im §. 5. haben und nur die Integration von $x = \beta$ an ausgeführt ist. Vermittelst §. 5, (*e.*) ergiebt sich hieraus

$$\mathfrak{c}_0\varphi(x) = \Big(\mathfrak{c}_0 x^\sigma - \frac{\sigma}{1}\mathfrak{c}_1 x^{\sigma-1} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\mathfrak{c}_2 x^{\sigma-2} - \text{etc.}\Big)\int_\beta^x E(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} + \sqrt{\psi(x)}\, G(n-2, x),$$

wenn die Constanten in G so bestimmt sind, dass $\varphi(x)$ den Gleichungen (*a.*) und (*b.*) genügt. Das oben vorkommende Integral lässt sich übrigens nach §. 2 in die Form

$$C\mathrm{H}_0 + D\mathrm{H}_1 + \sqrt{\psi(x)}\, G(\sigma-2, x)$$

umwandeln, wo C und D gewisse Constante bezeichnen, die keine anderen Irrationalitäten enthalten als k, α, β, γ. Es ergiebt sich endlich nach (*c.*), dass $E^n(x)$ durch $\sigma+1$ fache Differentiation aus dem Ausdrucke

(4.) $$\mathfrak{c}_0\varphi(x) = \Big(\mathfrak{c}_0 x^\sigma - \frac{\sigma}{1}\mathfrak{c}_1 x^{\sigma-1} + \text{etc.}\Big)\Big(C\int_\beta^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} + D\int_\beta^x \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}\Big) + \sqrt{\psi(x)}\, G(n-2, x)$$

erhalten wird. Man hätte ebenso gefunden

$$\mathfrak{C}_0\varphi(x) = \Big(\mathfrak{C}_0 x^\sigma - \frac{\sigma}{1}\mathfrak{C}_1 x^{\sigma-1} + \text{etc.}\Big)\Big(C\int_\beta^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} + D\int_\beta^x \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}}\Big) + \sqrt{\psi(x)}\, G_1(n-2, x).$$

§. 7. Man entdeckt endlich einen neuen Zusammenhang zwischen E und F aus (2.), indem man unter den Integralen nach z Zähler und Nenner mit $\sqrt{\psi_2(z)}$ multiplicirt. Die ganze Function $\sqrt{\psi_2(z)}.E^n(z)$ lässt sich dann als Summe zweier ganzen Functionen

$$= \big(\sqrt{\psi_2(z)}E^n(z) - \sqrt{\psi_2(x)}E^n(x)\big) + \sqrt{\psi_2(x)}E^n(x)$$

darstellen, und man findet

(5.) $$\frac{\mathfrak{f}F^n(x)}{\sqrt{\psi_1(x)}} + G^n(x) = E^n(x).\sqrt{\psi_2(x)}\Big[\mathfrak{c}_0\int_\beta^\gamma \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} - \mathfrak{C}_0\int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}\Big],$$

wenn zur Abkürzung die ganze Function G den Ausdruck bezeichnet

$$G^n(x) = \mathfrak{c}_0 \int_\beta^\gamma \frac{\sqrt{\psi_2(x)}\,E^n(x) - \sqrt{\psi_2(z)}\,E^n(z)}{x-z} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} - \mathfrak{C}_0 \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\psi_2(x)}\,E^n(x) - \sqrt{\psi_2(z)}\,E^n(z)}{x-z} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

Es werden $\frac{E^n(x)}{\sqrt{\psi_2(x)}}$ (eine ganze Function), $G^n(x)$ und $\frac{\mathfrak{f} F^n(x)}{\sqrt{\psi_1(x)}}$ sich wiederum als Nenner, Zähler und Rest eines Kettenbruches erweisen, und zwar desjenigen, in welchen sich der Ausdruck entwickeln lässt, der in (5.) mit eckigen Parenthesen umgeben ist, mal $\psi_2(x)$; im Folgenden soll dies genauer erörtert werden. Wir fassen zunächst den erwähnten Factor aus (5.) näher ins Auge.

Es ist nach I, §. 4, wenn $x > \gamma$,

$$\psi_2(x) \int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}} \left(\omega_0 \int_\gamma^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}} - \omega_1 \int_\gamma^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \right),$$

$$\psi_2(x) \int_\beta^\gamma \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}} \left(\eta_0 \int_\gamma^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)}} - \eta_1 \int_\gamma^\infty \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \right),$$

ferner (§. 6.)

$$\mathfrak{c}_0 = C\omega_0 + D\omega_1,$$
$$\mathfrak{C}_0 = C\eta_0 + D\eta_1,$$

wo C und D Constante sind, die nur solche Irrationalitäten enthalten, welche in den g und in α, β, γ vorkommen, also k, α, β, γ. Hieraus folgt, dass die Grösse, von der wir oben sagten, sie solle in einen Kettenbruch entwickelt werden, sich auch in die Form bringen lässt

$$\sqrt{\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}} \int_\gamma^\infty \frac{a+bx}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx,$$

wo a und b Constante sind, die ausser den vorgedachten Irrationalitäten nur noch π enthalten können.

Im weiteren Verlaufe soll wiederum der Einfachheit halber nur eine Classe der E betrachtet werden, dieselbe wie früher, für welche also $\psi_2(x) = 1$, $\psi_1(x) = \psi(x)$ ist, und für die man hat

$$(5^*.) \quad \begin{cases} \mathfrak{f} \dfrac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}} + G^n(x) = E^n(x).R, \\ G^n(x) = \mathfrak{c}_0 \displaystyle\int_\beta^\gamma \frac{E^n(x) - E^n(z)}{x-z} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} - \mathfrak{C}_0 \int_\alpha^\beta \frac{E^n(x) - E^n(z)}{x-z} \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \\ R = \mathfrak{c}_0 \displaystyle\int_\beta^\gamma \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} - \mathfrak{C}_0 \int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}, \end{cases}$$

so dass man also R noch mit der Form

$$R = \frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} \int_\gamma \frac{a+bx}{\sqrt{\psi(x)}}\, dx$$

vertauschen kann, wo a und b rational nach k sind, und ausser α, β, γ, π keine weitere Irrationalität enthalten. Der Grad von

$$E^n(x), \qquad G^n(x), \qquad \frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}}$$

ist resp. genau $\sigma = \frac{n}{2}$, höchstens $\sigma-1$, genau $-(\sigma+2)$. Den möglichst hohen Grad $\sigma-1$ würde G nur dann nicht erreichen, wenn $\mathfrak{c}_0\eta_0 - \mathfrak{C}_0\omega_0$ verschwindet. Für $n=0$ ist $\mathfrak{c}_0=\omega_0$, $\mathfrak{C}_0=\eta_0$, während für grössere n, wie es scheint, $\mathfrak{c}_0\eta_0-\mathfrak{C}_0\omega_0$ nicht verschwindet. Der fragliche Ausdruck, als Integral geschrieben, ist

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} \int_\beta^\gamma \frac{E^n(x)-E^n(y)}{\sqrt{\psi(y)}}\, dy.$$

α. Es haben E und G keinen gemeinsamen Factor. Existirte ein solcher, wären E und G also durch $x-p$ theilbar, wo p eine Constante bezeichnet, so wäre p (Hb. §. 89) nicht α, β, γ und $<\gamma$. Nach (5.) müsste dann $F(p)$ verschwinden; aber (Hb. §. 90, p. 239)

$$E\frac{dF}{du} - F\frac{dE}{du}$$

ist gleich einer Constanten und nicht 0, weil sonst $\frac{F}{E}$ constant, also F nicht vom Grade $-\frac{n+1}{2}$ wäre. Es müsste also $\frac{dF}{dx}$ unendlich für $x=p$ sein, was nach (5*.) unmöglich ist.

Eine ganze Function $\mathfrak{E}$ vom Grade σ, die gleich $x^\sigma+$etc. ist, wird, wie wir jetzt zeigen, höchstens $\sigma+1$ deutig durch die Bedingung bestimmt, dass sie mit

$$\mathfrak{R} = r\int_\beta^\gamma \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} - \int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}$$

multiplicirt (wo r von x unabhängig ist) eine ganze Function geben soll, vermehrt um einen Rest, der mit der $-(\sigma+2)^{\text{ten}}$ Potenz von x anfängt. Man findet *höchstens* $\sigma+1$ Werthe von r, für die ein solches $\mathfrak{E}$ existirt, also auch von $\mathfrak{R}$, und jedem verschiedenen r entspricht eine verschiedene, mit $\mathfrak{R}$ zu multiplicirende ganze Function $\mathfrak{E}$. Ist dies bewiesen, so schliesst man weiter: Da genau $\sigma+1$ Functionen E^n existiren, welche (5*.) erfüllen, so hat man *genau* $\sigma+1$ durch die oben genannten Eigenschaften definirte Functionen $\mathfrak{E}$,

genau ebenso viele r, $\mathfrak{R}$ und $\frac{\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{C}_0}$. *Eine Function* $\mathfrak{E}$ *vom Grade* σ, *die mit* $\mathfrak{R}$ *multiplicirt, einen Rest vom Grade* $-(\sigma+2)$ *lässt, ist also gleichbedeutend mit einer zu* $n=2\sigma$ *gehörigen Laméschen Function zweiter Ordnung, erster Art und Klasse.* Da der Rest ferner $\frac{\mathfrak{f}F^n}{\mathfrak{C}_0\sqrt{\psi(x)}}$, also genau vom Grade $-(\sigma+2)$ ist, so kann keine ganze Function $\mathfrak{E}$, mit $\mathfrak{R}$ multiplicirt, einen Rest vom Grade $-(\sigma+3)$ geben. Denn dadurch, dass der Rest x^{-1}, x^{-2}, etc., $x^{-(\sigma+1)}$ nicht enthält, ist sie schon definirt, also als $E^{(\alpha)}$ definirt, lässt daher einen Rest nur vom Grade $-(\sigma+2)$.

Zum Beweise des ersten Theiles entwickelt man $\mathfrak{R}$ in die Reihe

$$\frac{r\eta_0-\omega_0}{x}+\frac{r\eta_1-\omega_1}{x^2}+\frac{r\eta_2-\omega_2}{x^3}+\cdots,$$

und setzt die mit $\mathfrak{R}$ zu multiplicirende ganze Function

$$\mathfrak{E}=h_0x^\sigma+h_1x^{\sigma-1}+\cdots, \quad (h_0=1).$$

Alsdann ist im Reste mit x^{-m-1} multiplicirt, also gleich 0 zu setzen, so lange $m<\sigma+1$,

$$(r\eta_m-\omega_m)h_\sigma+(r\eta_{m+1}-\omega_{m+1})h_{\sigma-1}+\cdots+(r\eta_{m+\sigma}-\omega_{m+\sigma})h_0,$$

so dass man für $m=0, 1, \ldots \sigma$ im Ganzen $\sigma+1$ Gleichungen zwischen $\sigma+1$ Grössen h hat, deren rechte Seiten 0 sind. So lange die Determinante nicht verschwindet, müssen daher alle h Null sein; die Determinante verschwindet aber nicht allgemein, sondern nur für gewisse Werthe von r, welche dann eben gefunden werden, indem man diese Determinante, die nach r höchstens vom $\sigma+1^{\text{ten}}$ Grade ist, gleich Null setzt, und die Wurzeln r aufsucht.

Um zu zeigen, dass die Determinante nicht verschwindet, so lange r allgemein bleibt, braucht man nur das Gleiche von dem Theile derselben zu beweisen, welcher die höchste und die niedrigste Potenz von r enthält. Beide Theile sind ganz ähnlich gebildet; wir betrachten deshalb nur den ersten

$$\begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_\sigma \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{\sigma+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_\sigma & \eta_{\sigma+1} & \cdots & \eta_{2\sigma} \end{vmatrix}.$$

Da $\eta_m=\int_\beta^\gamma x^m\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$ ist, so kann man diese Determinante leicht bilden, wenn man die Veränderliche unter dem Integrale für die erste Horizontalreihe x_0, für die zweite x_1, etc. nennt. Es handelt sich dann hauptsächlich um die

Determinante (die x unten angehängten Zahlen sind Indices, die oberen Exponenten)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^\sigma \\ x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^\sigma \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_\sigma^\sigma & x_\sigma^{\sigma+1} & x_\sigma^{\sigma+2} & \dots & x_\sigma^{2\sigma} \end{vmatrix} = x_1 x_2^2 \dots x_\sigma^\sigma \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^\sigma \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^\sigma \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_\sigma & x_\sigma^2 & \dots & x_\sigma^\sigma \end{vmatrix}.$$

Heisst letztere Determinante, nämlich

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_\sigma - x_0) \\ &\quad (x_2 - x_1) \dots (x_\sigma - x_1) \\ &\quad\quad \dots\dots\dots \\ &\quad\quad\quad (x_\sigma - x_{\sigma-1}), \end{aligned}$$

Π, so wird die Determinante aus den η gleich

$$\int_\beta^\gamma \frac{x_1 x_2^2 \dots x_\sigma^\sigma \cdot \Pi \cdot dx_0 dx_1 \dots dx_\sigma}{\sqrt{\psi(x_0)\psi(x_1)\dots\psi(x_\sigma)}}.$$

Wäre dieser Ausdruck $= 0$, so müsste er auch durch Vertauschung der Grössen x_1, x_2, etc. untereinander auf alle mögliche Arten Null bleiben, da die Function unter dem Integralzeichen dadurch nur ihr Zeichen, nicht den Werth ändern kann. Es müsste also auch die Summe solcher Integrale, d. h.

$$\int (\Pi)^2 \frac{dx_0\, dx_1 \dots dx_\sigma}{\sqrt{\psi(x_0)\psi(x_1)\dots\psi(x_\sigma)}}$$

verschwinden, was unmöglich ist, da Π nicht für jedes x_0, x_1, etc. Null wird.

Es verschwindet also die Determinante des Systemes, aus welchem die h zu bestimmen sind, nicht für alle r sondern höchstens für $\sigma+1$ Werthe dieser Grösse, welche eben die Wurzeln der Gleichung $\sigma+1^{\text{ten}}$ Grades nach r sind, die man erhält, indem man die Determinante gleich Null setzt. Wir zeigen nun, dass jedem dieser Werthe von r ein und nur ein System von h entspricht. In der That, lässt man die letzte Gleichung des Systems linearer Gleichungen, aus welchem die h bestimmt werden sollen, fort (für $m = \sigma$). und bezeichnet die Determinanten der Systeme, die man dann erhält, wenn man ausserdem die erste, oder zweite, etc. Vertikalreihe streicht, resp. durch H_0, H_1, ... H_σ, so wird

$$h_0 : h_1 : \text{etc.} : h_\sigma = H_0 : H_1 : \text{etc.} : H_\sigma.$$

Bei allgemeinem r können die H nicht sämmtlich verschwinden, weil sonst die ganze Determinante $(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grades Null wäre; daher können für ein

specielles r zwar die H selbst verschwinden, aber nicht alle Verhältnisse $H_m : H_\mu$, indem man bei der Aufsuchung des Werthes von $\frac{0}{0}$, den diese ganzen Functionen höchstens σ^{ten} Grades nach r hervorrufen, wenn sie wirklich verschwinden sollten, auf Ausdrücke in bestimmten Zahlen, von denen im schlimmsten Falle einige Null sind, gelangen muss; man findet also *höchstens* $\sigma+1$ verschiedene Systeme der h, also (s. oben) *genau* $\sigma+1$.

Als *Zusatz* zieht man hieraus, dass der Rest, den eine Function f von niedrigerem als σ^{ten} Grade verschaffen würde, nicht mit der $-(\sigma+2)^{\text{ten}}$, $-(\sigma+3)^{\text{ten}}$, etc. Potenz von x beginnen kann.

β. Die *wahre* Entwickelung der Grösse R in einen Kettenbruch nennen wir die Form

$$(a.) \qquad R = \cfrac{1}{A_0 - \cfrac{1}{A_1 - \text{etc.} \cfrac{1}{A_{m-1} - R_m}}},$$

wenn die A ganze Functionen von x bezeichnen, und R_m für $x=\infty$ verschwindet, oder was dasselbe ist nur negative Potenzen von x enthält, wenn es als Reihe gegeben ist, welchen ganzen Werth auch m erhält. R, allgemein jede Function R, die nur negative Potenzen von x enthält, wird sich *nur auf eine Art* in einen solchen Kettenbruch entwickeln lassen. (Ist R die Summe einer ganzen Function und eines Theiles, der nur negative Potenzen von x enthält, so wird man es leicht in ganz ähnlicher Art entwickeln können.) Es sei nämlich

$$R = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \text{etc.},$$

und c_0 nicht Null, so kann man setzen

$$R = \frac{1}{px+q-R_1}$$

und die Constanten p und q so bestimmen, dass R_1 nur negative Potenzen von x enthält. Da nämlich

$$R_1 = \frac{R(px+q)-1}{R},$$

und der Zähler gleich

$$(c_0 p - 1) + \frac{(c_1 p + c_0 q)}{x} + \frac{(c_2 p + c_1 q)}{x^2} + \text{etc.}$$

wird, so hat man dazu nur

$$c_0 p - 1 = 0, \quad c_1 p + c_0 q = 0$$

zu setzen, wodurch p und q eindeutig bestimmt sind. Sollte auch $c_2 p + c_1 q$, etc. verschwinden, so würde R_1 nicht wie im entgegengesetzten Falle mit der -1ten Potenz von x, sondern mit der -2ten, etc. anfangen. Wäre $c_0 = 0$ gewesen, aber nicht c_1, so hätte man

$$R = \frac{1}{px^2 + qx + r - R_1}$$

gesetzt, und p, q, r durch die Gleichungen

$$c_1 p - 1 = 0, \quad c_2 p + c_1 q = 0, \quad c_3 p + c_2 q + c_1 r = 0$$

eindeutig bestimmt. In ähnlicher Art verfährt man, wenn noch c_2, etc. verschwinden. Man kann also R in einen Kettenbruch der vorstehenden Form entwickeln, wo noch dazu die A im Allgemeinen ganze Functionen *ersten* Grades sein werden.

Da $\frac{1}{A_{m-1} - R_m} = R_{m-1}$ ebenfalls nur negative Potenzen von x enthalten kann, wenn R_m diese Eigenschaft hat, so wird auch R_0, R_1, ... R_{m-1} diese Eigenschaft zukommen, wenn R_m sie besitzt. Das Criterium der *wahren* Entwickelung braucht also nur für ein bestimmtes m erfüllt zu sein, und ist dann auch für alle früheren m vorhanden. Wir sehen hier, dass eine wahre Entwickelung nur auf *eine* Art stattfinden kann.

Irgend eine Function $\mathfrak{E}$ vom Grade σ habe nun die Eigenschaft, mit R multiplicirt eine ganze Function $\mathfrak{G}$ vermehrt um den Rest $\mathfrak{S}$ zu geben, der nur negative Potenzen von x enthält. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ sollen keinen gemeinsamen Theiler haben. Man kann dann $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}$ in einen Kettenbruch

$$(b.) \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}} = \cfrac{1}{A - \cfrac{1}{A_1 - \text{etc.} \cfrac{1}{A_{m-1}}}}$$

entwickeln; ich behaupte, dass $(b.)$ der Anfang der wahren Entwickelung von R ist, dass sich also R_m mit nur negativen Potenzen von x so bestimmen lasse, dass der Bruch $(a.)$ gleich R ist. Es werden nur noch einige Annahmen hinzukommen müssen, die aber nach $\alpha.$ erfüllt sind, wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ in die Buchstaben E und G von $(5^*.)$ übergehen.

Es seien Z und N die Zähler und Nenner des auf gewöhnliche Art gebildeten letzten Näherungsbruches von $(b.)$, so dass Z und N sich nur durch einen constanten Factor von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ unterscheiden; $'Z$ und $'N$ mögen

dem vorletzten Näherungsbruche angehören. Dann ist

$$R = \frac{Z - R_m . {}'Z}{N - R_m . {}'N},$$

$$R_m = \frac{RN - Z}{R . {}'N - {}'Z}.$$

Der Zähler von R_m ist aber im Wesentlichen $R\mathfrak{E} - \mathfrak{G}$, bei unseren Anwendungen auf E und G vom Grade $-(\sigma+2)$, während $'N$ von geringerem Grade als $\mathfrak{E}$ ist, so dass, wenigstens bei uns, wenn der Nenner $R.'N - 'Z$ mit der $-p^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnt (s. d. Zusatz unter α.), $p < \sigma+2$ ist. Folglich hat R_m nur negative Potenzen von x.

γ. Wir können also, wenn r in $\mathfrak{R}$ ein unter α. besprochener Wurzelwerth der Determinante $\sigma+1^{\text{ten}}$ Grades ertheilt wird, die Entwickelung (a.) für $\mathfrak{R}$ setzen, und wissen, dass der Näherungsnenner, welcher vom Grade σ ist, bis auf einen constanten Factor eine Function zweiter Ordnung $E^n(x)$, der dazu gehörige Zähler $G^n(x)$, der entsprechende Rest $\frac{\mathfrak{k} F^n(x)}{\mathfrak{G}_0 \sqrt{\psi(x)}}$ sein wird. Ich behaupte, *dass sämmtliche A Functionen ersten und zweiten Grades von x sind.* Ist nämlich der Grad von A_m gleich a_m, so ist der Grad des Zählers Z und Nenners N von dem Näherungswerthe des ganzen Bruches (b.) respective $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}$ und $a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1}$. Letztere Zahl ist σ, erstere höchstens $\sigma - 1$ (s. o. vielleicht genau $\sigma - 1$, wenn nicht $n = 0$), also $a_0 = 1$ oder 2 (vielleicht genau 1, wenn nicht $n = 0$). Ferner ist (Hb. §. 63, p. 161) der Grad von $\mathfrak{R}$ weniger dem Bruche (b.) gleich $-(n+a_m)$; soll er $-(n+2)$ sein, so ist $a_m = 2$. Brachen wir bei einer früheren, der p^{ten} Stelle ab, an der der Nenner des Näherungsbruches keine Function E giebt, so war dort a_p sicher nur 1, weil, wenn $a_p = 2$ gewesen wäre, der Nenner, nach α., auch hätte ein E sein müssen; aber grösser als 2 kann a_p sicher nicht sein, weil sonst der Rest mit einer um drei Einheiten grösseren Potenz von $\frac{1}{x}$ angefangen hätte, als der Grad des Näherungsnenners angiebt, was unmöglich ist (vergl. den Zusatz unter α.). *Wir haben also das Resultat:*

Entwickelt man

$$r \int_\beta^\gamma \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}} - \int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}} \int_\gamma^\cdot \frac{(\varrho + \varrho_1 x)}{\sqrt{\psi(x)}} dx,$$

wenn r, ϱ und ϱ_1 Constanten bedeuten (man führt *zwei* Grössen ϱ und ϱ_1 ein, obgleich es nur auf ihr Verhältniss ankommt, weil im speciellen Falle ϱ_1 verschwindet), in einen wahren Kettenbruch, der nothwendig die Form hat:

$$\cfrac{1}{px+q+\cfrac{1}{p_1x+q_1+\cdots+\cfrac{1}{p_{\sigma-1}x+q_{\sigma-1}+\cfrac{1}{p_\sigma x^2+q_\sigma x+r+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}},$$

so wird *immer*, wenn man unmittelbar vor einer Stelle abbricht, an der ein Partialnenner vom zweiten Grade vorkommt, *und nur dort* (also hier bei $p_{\sigma-1}x+q_{\sigma-1}$) der eingerichtete Bruch als Nenner $E^{2\sigma}(x)$, als Zähler $G^{2\sigma}(x)$, als Rest $\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{C}_0}\frac{F^{2\sigma}(x)}{\sqrt{\psi(x)}}$ geben. So lange r allgemein bleibt, werden alle Partialnenner vom ersten Grade sein; man kann aber r $\sigma+1$ Werthe geben, von denen jeder an der σ^{ten} Stelle einen Partialnenner zweiten Grades $p_\sigma x^2+\text{etc.}$ hervorbringt, so dass man dadurch alle $E^{2\sigma}$, $G^{2\sigma}$, $F^{2\sigma}$ der ersten Classe erzeugt. Diese $\sigma+1$ Werthe von r sind Wurzeln eines Ausdruckes vom Grade $\sigma+1$ nach r, einer gewissen Determinante (Aehnliches gilt für ϱ).

Ob man für *dasselbe* r $\left(\text{oder } \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)$ mehrere solche r kritischen Stellen, d. h. mehrere Partialnenner zweiten Grades in demselben Kettenbruche, also mehrere Functionen E^n, natürlich dann mit verschiedenen Indices n erhält, kann noch nicht gesagt werden. Es findet dieses Statt oder nicht Statt, je nachdem durch Auflösung der Gleichungen für die r bei verschiedenen n einmal eine frühere Wurzel r sich wiederholt, oder keine sich wiederfindet.

Es möchte überflüssig sein, ähnlich, wie es im §. 5. geschah, auch hier aus den allgemeineren Formeln die bekannten speciellen für den Fall abzuleiten, dass in $\psi(x)$ die Grössen β und γ gleich werden, und die E und F in Kugelfunctionen P und Q übergehen, wodurch, wie man weiss, die in einen Kettenbruch zu entwickelnde Grösse sich in $\log\frac{x+1}{x-1}$ verwandelt. Man hat also das in der Einleitung erwähnte Resultat festgestellt, nach dem die Functionen erster Ordnung, die speciellen zweiter Ordnung und die allgemeinen zweiter Ordnung sich in gleicher Weise, als Näherungsnenner und Reste, auf Kettenbrüche beziehen, in die man resp. $[(x-\alpha)(x-\beta)]^{-\frac{1}{2}}$, $\log\frac{x+1}{x-1}$, und ein elliptisches Integral entwickeln kann. Zu gleicher Zeit hat man eine

Einsicht in die wahre Kettenbruchentwickelung elliptischer Integrale gewonnen, und eingesehen, welche Wichtigkeit die Stellen im Bruche haben, an welchen das Gesetz der Partialnenner sich ändert, und ein solcher nicht mehr vom ersten, folglich vom zweiten Grade wird.

Auf eine, im Augenblick muss man noch sagen äusserliche Aehnlichkeit der Brüche für die elliptischen Functionen mit jenen für die wahre Entwickelung von $\sqrt{D}$ soll hier noch aufmerksam gemacht werden, wenn D eine ganze Function beliebigen Grades von x bezeichnet. Auch $\sqrt{D}$ giebt einen Kettenbruch, in dem diejenigen Stellen, an welchen Partialnenner zweiten Grades vorkommen, eine wichtige Rolle spielen. Nur unmittelbar vor solchen Stellen darf man den Bruch abbrechen, grade wie es bei unserem Bruche geschieht, und ihn einrichten, um als Zähler Z und Nenner N der so entstehenden Näherungsbrüche die ganzen Functionen zu erhalten, welche der *Pell*schen Gleichung $N^2 - DZ^2 = 1$ genügen.

§. 8. Die Entwickelung nach den Functionen zweiter Ordnung bedarf nach der ausführlichen Behandlung dieses Gegenstandes im Hb. und den Erörterungen von II, §. 8 keiner weiteren Besprechung. Es wurde bereits auf die Rolle aufmerksam gemacht, die §. 5, (*c.*) hierbei spielt.

Wir beschliessen die Untersuchung der Functionen zweiter Ordnung mit der Bemerkung, dass die Formel (5*.) sich der Hauptsache nach bereits im Hb. §. 90, p. 241 findet, und dass diese auf die neuen Resultate des Abschnittes III führte, die wiederum den allgemeinen Gesichtspunkt gewinnen liessen, unter dem wir hier die *Laméschen* Functionen betrachten. Behält man nämlich genau die Bezeichnung des Hb. bei, und setzt

$$-\sum \frac{1}{(K'(\alpha))^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)} = \varrho,$$

$$\sum \frac{1}{(K'(\alpha))^2} \cdot \frac{1}{(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)} = \varrho_1,$$

so wird

$$F^n(x) = \text{const.}\, K^n(x) - \sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2} \sum \frac{K(x)}{(K'(\alpha))^2 (x-\alpha)(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)}$$

$$+ \int_c^x \frac{\varrho + \varrho_1 x^2}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}\, dx.$$

Berücksichtigt man noch, dass im Zähler unter dem Summenzeichen $K(x) - K(\alpha)$ für $K(x)$ gesetzt werden kann, da $K(\alpha)$ verschwindet, so wird $\frac{K(x)}{x-\alpha}$ eine

ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades nach x, also

$$\sum \frac{K(x)}{(K'(\alpha))^2(x-\alpha)(\alpha^2-b^2)(\alpha^2-c^2)} = G(x),$$

wo $G(x)$ eine ganze Function von x ist, welche mit $\varrho_1 x^{n-1}$ anfängt. Dies ist aber das Resultat (5*.) in der gegenwärtigen Arbeit; von Wichtigkeit für die neue Methode war es, dass statt des elliptischen Integrals der beiden ersten Gattungen zwei ganze Integrale dritter Gattung eingeführt wurden.

IV. Die Laméschen Functionen dritter und höherer Ordnung.

Wie in III, §. 1 stellen wir hier am Anfange des Abschnittes unsere Festsetzungen und Bezeichnungen zusammen, die sich auf die Functionen dritter Ordnung beziehen werden.

$$\psi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = x^4 - C_1 x^3 + C_2 x^2 - C_3 x + C_4;$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}; \quad \omega_m = \int_\alpha^\beta \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}; \quad \eta_m = \int_\beta^\gamma \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}; \quad \zeta_m = \int_\gamma^\delta \frac{x^m dx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta; \qquad \sigma = \frac{n}{2}, \quad \frac{n-1}{2}.$$

Reden wir von Functionen höherer, der p^{ten} Ordnung, so hat man sich unter $\psi(x)$ ein Polynom $p+1^{\text{ten}}$ Grades vorzustellen, und die übrigen Bezeichnungen dem auf selbstverständliche Art entsprechend zu verallgemeinern. Die Functionen dritter Ordnung erhält man durch Betrachtung der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2W}{du^2} - [n(n+2)x^2 + k_1 C_1 x - k_2 C_2]\frac{W}{4} = 0,$$

die p^{ter} Ordnung aus der Gleichung

$$(1^*.) \quad \frac{d^2W}{du^2} - [n(n+p-1)x^{p-1} + k_1 C_1 x^{p-2} - \cdots \pm k_{p-2} C_{p-2} x \mp k_{p-1} C_{p-1}]\frac{W}{4} = 0.$$

Die Grössen k_1, etc. lassen sich so bestimmen, dass für je eine Combination derselben ein Integral dieser Gleichungen eine ganze Function n^{ten} Grades von A, B, etc. ist; eine andere Lösung wird dann, nach absteigenden Potenzen von x entwickelt, mit $x^{-\frac{(n+p-1)}{2}}$ anfangen. Die ersten Lösungen heissen Functionen erster Art E, die anderen Functionen zweiter Art F. Sie zerfallen in Klassen, wie die Functionen zweiter Ordnung.

Um dies für die Functionen dritter Gattung etwas näher zu untersuchen, betrachten wir wiederum nur einen Fall, den des graden n, und zeigen,

dass die erste Klasse existirt, welche eine ganze Function von x vom Grade σ sein wird. Man setze deshalb in (1.) für $\frac{d^2W}{du^2}$ vollständiger

$$\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\psi'(x)\frac{dW}{dx},$$

$$W = g_0x^\sigma+g_1x^{\sigma-1}+\text{etc.}+g_\sigma$$

und hat dann zur Bestimmung der Coefficienten g, von denen man $g_0=1$ setzen kann, die Gleichung, in der man wieder alle C allgemein lässt, und keines gleich Null macht,

$$(2m+2)(2m+4)C_4g_{\sigma-m-2}-(2m+1)(2m+2)C_3g_{\sigma-m-1}+(4m^2+k_2)C_2g_{\sigma-m}$$
$$-[(2m-2)(2m-1)+k_1]C_1g_{\sigma-m+1}-(n-2m+4)(n+2m-2)g_{\sigma-m+2} = 0,$$

deren linke Seite der Factor von x^m in dem Ausdrucke ist, welchen man erhält, wenn man die Reihe für W in (1.) einsetzt. Da dann eine Reihe entsteht, die mit $x^{\sigma+2}$ anfängt, so hat man m der Reihe nach gleich $\sigma+2$, $\sigma+1$, ... 0 zu setzen. Für $m=\sigma+2$ erhält man keine Bedingung; unser System beginnt also

$$\begin{aligned}
0 &= -[(n+1)n+k_1]C_1g_0-2(2n)g_1,\\
0 &= (n^2+k_2)C_2g_0-[(n-1)(n-2)+k_1]C_1g_1-4(2n-2)g_2,\\
0 &= -n(n-1)C_3g_0+[(n-2)^2+k_2]C_2g_1-[(n-3)(n-4)+k_1]C_1g_2-6(2n-4)g_3,\\
0 &= n(n-2)C_4g_0-(n-2)(n-3)C_3g_1+[(n-4)^2+k_2]C_2g_2\\
&\qquad -[(n-5)(n-6)+k_1]C_1g_3-8(2n-6)g_4
\end{aligned}$$

und schliesst

$$\begin{aligned}
0 &= 6.8C_4g_{\sigma-4}-5.6C_3g_{\sigma-3}+(16+k_2)C_2g_{\sigma-2}-(2.3+k_1)C_1g_{\sigma-1}-n(n+2)g_\sigma,\\
0 &= 4.6C_4g_{\sigma-3}-3.4C_3g_{\sigma-2}+(4+k_2)C_2g_{\sigma-1}-k_1C_1g_\sigma,\\
0 &= 2.4C_4g_{\sigma-2}-1.2C_3g_{\sigma-1}+k_2C_2g_\sigma.
\end{aligned}$$

Die ersten σ von diesen $\sigma+2$ Gleichungen dienen dazu alle g durch g_0 auszudrücken, wodurch sie rational in k_1 und k_2 werden; die beiden letzten geben schliesslich zwei Gleichungen zwischen k_1 und k_2, denen diese genügen müssen, und aus denen sie zu ermitteln sind. Die genauere Erforschung dieser Gleichungen, deren Grad nach k_1 und k_2 man leicht erkennt, und welche man als Determinanten resp. der ersten oder letzten $\sigma+1$ Gleichungen schreiben kann, muss späteren Untersuchungen überlassen bleiben, die dann auch erst die Anzahl der Functionen der betreffenden Ordnung für jedes n ergeben werden.

Von specielleren Functionen derselben Ordnung spielen bis jetzt diejenigen die Hauptrolle, in welchen *alle* Constanten β, γ, δ, etc. einander gleich werden; es sind dies die Kugelfunctionen höherer Ordnung, auf die man bei den Entwickelungen kommt, auf welche am Schlusse der Einleitung hingewiesen wurde. Nach den dortigen Andeutungen wird man ihre Differentialgleichungen leicht aufstellen können, von denen man auch ohne Schwierigkeit vermittelst geschlossener Reihen je ein Integral findet. Wenn nicht dieser Gegenstand von Anderen weiter verfolgt wird, so denke ich später meine bisherigen Untersuchungen über dieselben weiter auszuführen, und sie dann mitzutheilen. Es scheint mir übrigens möglich, aus der Anzahl dieser speciellen Functionen ebenso Schlüsse über die Anzahl der allgemeinen in der gleichen Klasse zu ziehen, wie es für die Functionen zweiter Ordnung Hb. §. 83, p. 217 geschah.

Für den speciellen Fall $\alpha = -\beta$, $\gamma = -\delta$ gehen die Gleichungen, welche zur Bestimmung der g dienen, in $g_1 = g_3 = \text{etc.} = 0$ und in einfache zwischen g_0, g_2, etc. über. Letztere sind dieselben, welche III, §. 2 zwischen g_0, g_1, etc. stattfinden, wenn man dort σ für n schreibt. Unser E ist dann also im Wesentlichen eine Function zweiter Ordnung, was man schon von vorn herein hätte einsehen können.

Die verschiedenen Klassen der E dritter Ordnung unterscheidet man wieder nach ihren Irrationalitäten; zerfällt man $\psi(x)$ auf beliebige Art in zwei Factoren, die ganze Functionen von x sind, $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$, so haben sie alle die Form von Producten $\sqrt{\psi_1(x)}.G(x)$, wo $G(x)$ eine ganze Function von x bezeichnet, die nicht mit $\psi(x)$ zugleich verschwindet. Das Letztere folgt sogleich aus der Differentialgleichung (1.), ebenso wie der ähnliche Satz Hb. §. 87, p. 229 bewiesen wurde.

Um nun E mit F in Verbindung zu bringen, wendet man das Verfahren III, §. 4 an. Durch Einführung der Grösse

$$U = \frac{W}{\sqrt{\psi_1(x)}}$$

erhält man zunächst eine Gleichung aus (1.), welche die in I. geforderte Form besitzt, also nach der dortigen Methode integrirt werden kann. War z. B. E eine ganze Function von x, also n grade und E von der ersten Klasse, so wird (I, §. 3., (2.))

$$(2.) \qquad \frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}} = C_0 J_0 + C_1 J_1 + C_2 J_2,$$

wenn

$$J_0=\int_\alpha^\beta \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}},\quad J_1=\int_\beta^\gamma \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}},\quad J_2=\int_\gamma^\delta \frac{E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

ist, und wenn C_0, C_1, C_2 nicht die Werthe haben, die am Anfange dieses Abschnittes durch den Buchstaben C bezeichnet wurden, sondern die Determinanten sind

$$C_0=\mathfrak{c}_1^0\mathfrak{c}_2^1-\mathfrak{c}_1^1\mathfrak{c}_2^0,\qquad C_1=\mathfrak{c}_2^0\mathfrak{c}_0^1-\mathfrak{c}_2^1\mathfrak{c}_0^0,\qquad C_2=\mathfrak{c}_0^0\mathfrak{c}_1^1-\mathfrak{c}_0^1\mathfrak{c}_1^0,$$

wo man gesetzt hat

$$\mathfrak{c}_0^{(q)}=\int_\alpha^\beta z^q E^{(n)}(z)\,dz,\quad \mathfrak{c}_1^{(q)}=\int_\beta^\gamma z^q E^{(n)}(z)\,dz,\quad \mathfrak{c}_2^{(q)}=\int_\gamma^\delta z^q E^{(n)}(z)\,dz.$$

Es lässt sich dann (2.) auch in die Form zusammenziehen

$$(2^*.)\quad \frac{F^{(n)}(x)}{\sqrt{\psi(x)}}=\iiint\frac{(z_1-z_0)(z_2-z_0)(z_2-z_1)}{(x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)}E^{(n)}(z_0)E^{(n)}(z_1)E^{(n)}(z_2)\,dz_0\,dz_1\,dz_2,$$

wenn nach z_0, z_1, z_2 resp. in den Grenzen α und β, β und γ, γ und δ integrirt wird.

Die C spielen nun dieselbe Rolle wie die $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$ in III, so dass gewisse Verbindungen derselben (m. vergl. III, §. 5, (*a.*)) verschwinden müssen. Es ist daher *kein äusserlicher Zusammenhang,* dass der Factor unter dem Integrale

$$\varphi=(z_1-z_0)(z_2-z_0)(z_2-z_1)E^n(z_0)E^n(z_1)E^n(z_2)$$

derselbe ist, welcher bei der Coefficientenbestimmung in Reihen benutzt wird, die nach Producten aus drei E dritter Ordnung fortschreiten. Soll eine Function $\psi(z_0, z_1, z_2)$ in eine solche Reihe entwickelt werden, so kommt es auf das Integral

$$\iiint\psi\varphi\,dz_0\,dz_1\,dz_2$$

ebenso an, wie auf das entsprechende bei Reihen, die nach *Laméschen* Producten fortschreiten.

Die Darstellung der E dritter und höherer Ordnung durch einen vielfachen Differentialquotienten gestaltet sich hier ganz ähnlich wie an der früheren Stelle III, §. 6 das Entsprechende für die zweite Ordnung.

Aus (2.) leitet man endlich ab, dass $\frac{F^n(x)}{\sqrt{\psi(x)}}$ der Rest ist, (also der Theil, welcher nur negative Potenzen von x enthält), der bei der Multiplication von $E^n(x)$ mit

$$C_0\int_\alpha^\beta\frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}+C_1\int_\beta^\gamma\frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}+C_2\int_\gamma^\delta\frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}$$

entsteht, oder, wie man sich dann bekanntlich auch ausdrücken kann, bei der Multiplication von $E^n(x)$ mit einem elliptischen Integrale der Form

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(x)}}\int_\delta^x \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx,$$

über dessen Kettenbruchentwickelung und deren Zusammenhang mit E und F sich ganz ähnliche Schlüsse machen lassen, wie in III.

Um die Formel III, (5*.) auf unseren Fall zu übertragen hat man nur für R die eben erwähnten Integrale zu setzen, für $\psi(x)$ seinen Werth in diesem Abschnitte, und endlich $G^n(x)$ gleich der Summe

$$C_0\int_\alpha^\beta \frac{E^n(x)-E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}+C_1\int_\beta^\gamma \frac{E^n(x)-E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}+C_2\int_\gamma^\delta \frac{E^n(x)-E^n(z)}{x-z}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}.$$

Es wird überflüssig sein, noch etwas Weiteres über die Functionen höherer Ordnungen und die damit zusammenhängenden Kettenbruchentwickelungen der *Abel*schen Integrale hinzuzufügen.

Halle, im September 1861.

Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques, extrait d'une lettre de M. *Hermite* à l'éditeur.

. . . . Soit une forme biquadratique et son covariant du 4ième degré à savoir

$$f = ax^4+4bx^3y+6cx^2y^2+4b'xy^3+a'y^4,$$
$$g = (ac-b^2)x^4+2(ab'-bc)x^3y+(aa'+2bb'-3c^2)x^2y^2 +2(a'b-b'c)xy^3+(a'c-b'^2)y^4.$$

En posant suivant l'usage

$$I = aa'-4bb'+3c^2$$
$$J = aca'+2bcb'-ab'^2-a'b^2-c^3$$

je considère ces deux covariants qui sont encore du 4ième degré:

$$Ig-Jf \quad \text{et} \quad Ig+3Jf$$

et qui conduisent à la relation remarquable que voici.

Nommons F et G ce que deviennent f et g quand on y remplace x et y par $-\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}$, on aura

$$IG-JF = g^2(Ig+3Jf).$$

Il en résulte d'après le principe algébrique de *Jacobi* pour la transformation des fonctions elliptiques qu'en supposant $y=1$ et x seule variable et faisant pour abréger

$$\Delta(x) = Ig- Jf,$$
$$\Delta'(x) = Ig+3Jf,$$

on aura

$$\frac{dz}{\sqrt{\Delta(z)}} = M\frac{dx}{\sqrt{\Delta'(x)}}$$

z étant lié à x par cette relation du troisième degré:

$$z = -\frac{bx^3+3cx^2+3b'x+a'}{ax^3+3bx^2+3cx+b'}$$

et M désignant une constante. C'est donc la transformation du 3ième ordre qui s'offre comme conséquence de la théorie algébrique des formes biquadratiques.

Paris, mai 1861.

Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten.

(Von Herrn *Otto Hesse* zu Heidelberg.)

Die Bestimmung der Hauptaxen eines durch seine Gleichung in der Ebene gegebenen Kegelschnittes hängt von einer quadratischen Gleichung ab. Das Quadrat der Differenz der Wurzeln der Gleichung, ausgedrückt durch die Coefficienten in der gegebenen Kegelschnittsgleichung, lässt sich bekanntlich in die Summe von zwei Quadraten zerlegen, die einzeln verschwinden, wenn der Kegelschnitt ein Kreis wird. Ist der Kegelschnitt im Raume gegeben als der Schnitt einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung und einer gegebenen Ebene, so wird der Ausdruck für das Quadrat der Differenz der Wurzeln der quadratischen Gleichung, welche die Hauptaxen des Kegelschnittes bestimmt, so complicirt, dass eine direkte Zerlegung des Ausdruckes in die Summe von Quadraten unausführbar wird. Eine Zerlegung jenes Ausdruckes in die Summe von zwei Quadraten ist vielleicht ganz unmöglich. Aber sie ist möglich und ausführbar, wenn man statt 2 Quadrate 10, 7, 6 oder 5 gelten lässt. Diese Zerlegung bildet den Gegenstand der folgenden Auseinandersetzung.

Das Problem der Hauptaxen eines Kegelschnittes, der als der Schnitt einer Oberfläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$ und einer Ebene $ax + by + cz - d = 0$ gegeben ist, lässt sich, wenn man annimmt, dass

$$(1.) \quad \varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy$$

die Summe der Glieder 2ter Ordnung in der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ der gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung sei, und dass zwischen den Coefficienten a, b, c in der Gleichung der Ebene die Relation bestehe:

$$(2.) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

rein algebraisch so auffassen *):

*) Siehe Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von *O. Hesse*, 1861, pag. 329.

Die Substitutionen zu bestimmen:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = aX+a'Y+a''Z, \\ y = bX+b'Y+b''Z, \\ z = cX+c'Y+c''Z, \end{cases}$$

welche die Gleichungen

$$(4.)\quad x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2,$$

$$(5.)\quad \varphi(x,y,z) = \lambda_0 X^2+\lambda_1 Y^2+\lambda_2 Z^2-2\mu' YX-2\mu'' ZX$$

zu identischen Gleichungen machen.

Es führt dieses Problem auf die in λ quadratische Gleichung:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0\ ^*),$$

deren Wurzeln eben jene Coefficienten λ_1 und λ_2 von Y^2 und Z^2 in (5.) sind.

Dieses vorausgesetzt, handelt es sich nun darum, das Quadrat der Differenz $(\lambda_2-\lambda_1)$ durch die Coefficienten in der gegebenen Function $\varphi(x,y,z)$ und durch die gegebenen Coefficienten a, b, c in der Gleichung der Ebene auszudrücken und diesen Ausdruck als die Summe von Quadraten darzustellen.

Zu diesem Zwecke differentiiren wir die durch die Substitutionen (3.) identischen Gleichungen (4.) und (5.) partiell nach X, wodurch wir erhalten:

$$(7.)\quad ax+by+cz = X,$$

$$(8.)\quad \tfrac{1}{2}\varphi'(a).x+\tfrac{1}{2}\varphi'(b).y+\tfrac{1}{2}\varphi'(c).z = \lambda_0 X-\mu' Y-\mu'' Z.$$

Wir bringen ferner einen Determinanten-Satz, dieses Journal Bd. 22, p. 341, in Erinnerung, dem wir folgende Fassung geben:

Wenn n gegebene Functionen von eben so vielen Variabeln durch irgend welche Substitutionen von einer gleichen Zahl neuer Variabeln transformirt werden, so ist das Product der Determinante der gegebenen Functionen und der Determinante der Substitutionen gleich der Determinante der transformirten Functionen.

In dem vorliegenden Falle der Substitutionen (3.), welche die Gleichung (4.) zu einer identischen Gleichung machen, ist die Determinante der Substitution gleich $+1$ oder gleich -1. Wir können aber annehmen, sie sei

---

*) L. c. p. 331.

gleich +1. Denn im entgegengesetzten Falle braucht man nur die Vorzeichen sämmtlicher Substitutionscoefficienten in die entgegengesetzten zu verändern. Man hat daher den Satz:

Wenn 3 gegebene Functionen der Variabeln x, y, z durch die Substitutionen (3.), *welche die Gleichung* (4.) *zu einer identischen Gleichung machen, transformirt werden, so ist die Determinante der gegebenen Functionen gleich der Determinante der transformirten Functionen.*

Nach diesem Satze wird die durch 4 dividirte Determinante $\triangle$ der drei Functionen (7.), (4.), (5.):

$$(9.) \qquad \triangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \frac{1}{2}\varphi'(x) & \frac{1}{2}\varphi'(y) & \frac{1}{2}\varphi'(z) \end{vmatrix}$$

oder:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ \lambda_0 X - \mu' Y - \mu'' Z & \lambda_1 Y - \mu' X & \lambda_2 Z - \mu'' X \end{vmatrix}$$

und entwickelt:

$$(10.) \qquad \triangle = (\lambda_2 - \lambda_1) YZ + (\mu' Z - \mu'' Y) X.$$

Ebenso wird die durch 2 dividirte Determinante der drei Functionen (7.), (4.), (8.):

$$(11.) \qquad \triangledown = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ \frac{1}{2}\varphi'(a) & \frac{1}{2}\varphi'(b) & \frac{1}{2}\varphi'(c) \end{vmatrix}$$

oder:

$$\triangledown = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ \lambda_0 & -\mu' & -\mu'' \end{vmatrix}$$

und entwickelt:

$$(12.) \qquad \triangledown = \mu' Z - \mu'' Y.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit X und zieht sie von (10.) ab, so erhält man:

$$(13.) \qquad \triangle - \triangledown X = (\lambda_2 - \lambda_1) YZ,$$

eine Gleichung, welche auf ihrer rechten Seite nur das Product der Variabeln YZ mit dem Factor $\lambda_2 - \lambda_1$ enthält, während die linke Seite eine durch (9.), (11.) und (7.) gegebene Function der Variabeln x, y, z ist.

Diese Gleichung, gleich wie die folgende, welche durch Multiplication mit X aus ihr hervorgeht:

$$(14.) \qquad \triangle X - \triangledown X^2 = (\lambda_2 - \lambda_1) XYZ,$$

ist eine durch die Substitutionen (3.) des Problems identische Gleichung.

Die Differentiation der durch die Substitutionen (3.) identischen Gleichung (4.) nach X, Y, Z, oder die Auflösung der Substitutionen, welche die Gleichung (4.) zu einer identischen machen, giebt:

$$(15.)\quad \begin{cases} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Wenn wir das Product dieser aufgelösten Substitutionen, welche die Gleichung (4.) zu einer identischen machen, entwickeln wie folgt:

$$(16.)\quad XYZ = \Sigma A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so haben wir zwischen den Entwickelungscoefficienten die Gleichungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} 1 = 6\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\} + A_{111}^2 \\ \qquad + 2\{A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2\} \text{ *)}, \end{cases}$$

$$(18.)\quad \begin{cases} 1 = 15\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\} + A_{111}^2 \\ \qquad + (A_{120} - A_{102})^2 + (A_{012} - A_{210})^2 + (A_{201} - A_{021})^2 \text{ **)}. \end{cases}$$

Entwickeln wir aber auch den linken Theil der Gleichung (14.), der eine rationale Function ist der Coefficienten in dem Ausdrucke $\varphi(x, y, z)$ und der Coefficienten a, b, c, indem wir setzen:

$$(19.)\quad \Delta X - \nabla X^2 = \Sigma a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so ergiebt sich durch Substitution von (16.) und (19.) in (14.) und Vergleichung der beiden Seiten der letzten Gleichung:

$$(20.)\quad A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = \frac{a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Substituirt man diese Werthe in (17.) und (18.), so erhält man die gesuchte Zerlegung des Quadrates der Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ in die Summe von 10 Quadraten:

$$(21.)\quad \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 6\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 \\ \qquad + 2\{a_{120}^2 + a_{102}^2 + a_{012}^2 + a_{210}^2 + a_{201}^2 + a_{021}^2\} \end{cases}$$

und in die Summe von 7 Quadraten:

$$(22.)\quad \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 = 15\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 \\ \qquad + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2. \end{cases}$$

Um die dritte Zerlegung des Quadrates der Differenz in die Summe von 6 oder 5 Quadraten vorzubereiten, werden wir die Gleichung (17.) aus

*) L. c. p. 216.
**) L. c. p. 217.

einem neuen Gesichtspunkte beweisen *) und daraus eine zweite, dem Zwecke dienliche, analoge Gleichung entwickeln.

Die Transformation einer gegebenen homogenen Function:

$$(23.) \qquad \Sigma E_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$$

der drei Variabeln X, Y, Z von der m^{ten} Ordnung, also in der Voraussetzung $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m$, durch irgend welche lineare Substitutionen (3.) lässt sich ausführen wie die Transformation einer linearen homogenen Function durch ebenfalls lineare Substitutionen, deren Anzahl aber gleich ist der Zahl p der Fälle, in welchen $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m$ ist.

Um letztere darzustellen, bilden wir das Product $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ durch die Substitutionen (3.):

$$(24.) \qquad X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = \Sigma d^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}_{\beta_0\beta_1\beta_2} x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2},$$

indem wir mit β_0, β_1, β_2 in der Summe alle Zahlen 0, 1 ... m bezeichnen, deren Summe gleich m ist.

Diese Gleichung (24.) stellt ein ganzes System von p Gleichungen dar, da in ihr α_0, α_1, α_2 irgend welche Zahlen 0, 1 ... m bedeuten, deren Summe gleich m ist. Dieses System (24.) von p Gleichungen ist ein lineares, wenn man in ihm die p Producte $x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2}$ als die Unbekannten und die p Producte $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ als irgend welche gegebene Grössen betrachtet; und die Zahl der Gleichungen ist gerade gleich der Zahl der Unbekannten.

Betrachtet man daher die p Producte $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ als von einander unabhängige Variable und die p Producte $x^{\beta_0} y^{\beta_1} z^{\beta_2}$ ebenfalls als von einander unabhängige Variable, so stellt das System Gleichungen (24.) lineare Substitutionen dar, deren Anzahl gleich p ist.

Multiplicirt man nun die Gleichung (24.) mit $E_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ und nimmt die Summe aller p Gleichungen, so erhält man, wenn man den rechten Theil der Gleichung nach den unabhängigen Variabeln $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$ ordnet, eine Gleichung von der Form:

$$(25.) \qquad \Sigma E_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = \Sigma e_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

nämlich die Transformation der gegebenen Function (23.) der m^{ten} Ordnung durch die Substitutionen (3.).

Da diese Gleichung eine Folge ist der p linearen Substitutionen (24.), so wird man in ihr für die p Variabeln $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$ irgend welche Werthe

---

*) Der Beweis ist aus einer brieflichen Mittheilung des Prof. *Clebsch* genommen.

$B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ setzen können, wenn man gleichzeitig für die p anderen Variablen $x^{\alpha_0}y^{\alpha_1}z^{\alpha_2}$ diejenigen Werthe $b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ setzt, welche jenen durch die p linearen Substitutionen (24.) entsprechen. Man wird dadurch aus (25.) immer eine richtige Gleichung erhalten. Wir drücken diese Bemerkungen als Satz aus wie folgt:

Wenn die linearen Substitutionen (3.) *die Gleichung* (25.) *zu einer identischen Gleichung machen, so ist es erlaubt in ihr statt der Producte* $X^{\alpha_0}Y^{\alpha_1}Z^{\alpha_2}$ *irgend welche Werthe* $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *zu setzen, wenn man gleichzeitig für* $x^{\alpha_0}y^{\alpha_1}z^{\alpha_2}$ *diejenigen Werthe* $b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *setzt, welche jenen in dem linearen Systeme* (24.) *von p Gleichungen entsprechen.*

Wir werden fortan annehmen, dass die Substitutionen (3.) orthogonale seien, welche also die Gleichung (4.) zu einer identischen machen. Alsdann sind auch folgende orthogonale Substitutionen:

$$(26.)\qquad \begin{cases} X_1 = ax_1 + by_1 + cz_1, \\ Y_1 = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ Z_1 = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{cases}$$

und man hat die durch die orthogonalen Substitutionen (3.) und (26.) identische Gleichung:

$$(27.)\qquad XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = xx_1 + yy_1 + zz_1$$

gleich wie die folgende:

$$(28.)\qquad (XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^m = (xx_1 + yy_1 + zz_1)^m.$$

Entwickeln wir diese Gleichung nach dem polynomischen Lehrsatze, indem wir setzen

$$(29.)\qquad \begin{cases} \Pi(m) = 1.2 \ldots m, \\ C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = \Pi(\alpha_0).\Pi(\alpha_1).\Pi(\alpha_2) \end{cases}$$

und lassen den allen Gliedern der Entwickelung gemeinsamen Factor $\Pi(m)$ fort, so erhalten wir:

$$(30.)\qquad \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} X^{\alpha_0}Y^{\alpha_1}Z^{\alpha_2}.X_1^{\alpha_0}Y_1^{\alpha_1}Z_1^{\alpha_2} = \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x^{\alpha_0}y^{\alpha_1}z^{\alpha_2}.x_1^{\alpha_0}y_1^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2}.$$

Denken wir uns in dieser Gleichung für X_1, Y_1, Z_1 die Werthe (26.) gesetzt, so wird sie, wie (25.), eine durch die Substitutionen (3.) identische Gleichung und erfüllt die Bedingungen des angegebenen Satzes. Man hat daher:

$$(31.)\qquad \Sigma \frac{B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} X_1^{\alpha_0}Y_1^{\alpha_1}Z_1^{\alpha_2} = \Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x_1^{\alpha_0}y_1^{\alpha_1}z_1^{\alpha_2}.$$

Es ist dieses wieder eine durch die Substitutionen (26.) identische Gleichung, in welcher die Coefficienten $b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ durch die Coefficienten $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ bedingt sind. Die ersteren $b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ kann man daher durch die anderen $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ entweder durch die Entwickelung von (31.) bestimmen oder durch Auflösung der linearen Gleichungen (24.). Hiernach hat man den Satz:

Wenn eine gegebene homogene Function: $\Sigma \frac{B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} X_1^{\alpha_0} Y_1^{\alpha_1} Z_1^{\alpha_2}$ *der* m^{ten} *Ordnung durch die orthogonalen Substitutionen* (26.) *transformirt wird in:* $\Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x_1^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} z_1^{\alpha_2}$, *so genügen die Werthe* $X^{\alpha_0} Y^{\alpha_1} Z^{\alpha_2} = B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *und* $x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ *den* p *linearen Gleichungen* (24.).

Die Gleichung (31.) erfüllt durch die Substitutionen (26.) die Bedingungen des ersten Satzes. Wendet man diesen Satz auf die genannte Gleichung an, so ergiebt sich daraus folgender Satz:

Wenn die orthogonalen Substitutionen (26.) *die Gleichung* (31.), *in welcher der linke Theil irgend eine gegebene homogene Function der* m^{ten} *Ordnung ist, zu einer identischen machen, so hat man:*

$$(32.) \qquad \Sigma \frac{B^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}.$$

Wir werden zwei specielle Fälle hervorheben. Wir werden erstens annehmen, dass $m = 3$ sei und dass alle $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = 0$ seien mit Ausnahme des einen $B_{111} = 1$. Unter dieser Annahme wird die Gleichung (31.):

$$(33.) \qquad XYZ = \Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

und man hat nach dem letzten Satze:

$$(34.) \qquad 1 = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}.$$

Setzen wir aber, um von unserer früheren Bezeichnung Gebrauch zu machen:

$$(35.) \qquad b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},$$

indem wir die durch die Substitutionen (3.) identische Gleichung (33.) also darstellen:

$$(36.) \qquad XYZ = \Sigma A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so geht die Gleichung (34.) über in:

$$(37.) \qquad 1 = \Sigma C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} A^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},$$

woraus durch Entwickelung die Gleichung (17.) hervorgeht.

Wenn wir zweitens $m = 2$ setzen und alle $B_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ verschwinden lassen mit Ausnahme von B_{011}, welches gleich 1 sei, so erhalten wir aus (31.):

$$(38.) \qquad YZ = \Sigma \frac{b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

und hieraus nach dem letzten Satze:

$$(39.) \qquad 1 = \Sigma \frac{b^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}.$$

Setzen wir endlich, um dieselbe Bezeichnung zu gebrauchen:

$$(40.) \qquad b_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},$$

so gehen (38.) und (39.) über in:

$$(41.) \qquad YZ = \Sigma A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

$$(42.) \qquad 1 = \Sigma C_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} A^2_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},$$

von welchen Gleichungen die letzte entwickelt giebt:

$$(43.) \qquad 1 = 2(A^2_{200}+A^2_{020}+A^2_{002})+A^2_{011}+A^2_{101}+A^2_{110}.$$

Zwischen den Substitutions-Coefficienten hat man die Gleichung: $a'a''+b'b''+c'c''=0$, welche nach der eingeführten Bezeichnung sich so darstellt:

$$A_{200}+A_{020}+A_{002} = 0.$$

Es ist daher:

$$A^2_{200} = A^2_{020}+2A_{020}A_{002}+A^2_{002},$$

$$(A_{020}-A_{002})^2 = A^2_{020}-2A_{020}A_{002}+A^2_{002},$$

woraus hervorgeht:

$$A^2_{200}+(A_{020}-A_{002})^2 = 2A^2_{020}+2A^2_{002}.$$

Zieht man diese Gleichung von (43.) ab, so erhält man:

$$(44.) \qquad 1 = 3A^2_{200}+(A_{020}-A_{002})^2+A^2_{011}+A^2_{101}+A^2_{110}.$$

Entwickeln wir nun den linken Theil der Gleichung (13.), indem wir setzen:

$$(45.) \qquad \triangle - \nabla X = \Sigma a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2},$$

so ergiebt sich durch Vergleichung der durch die Substitutionen (3.) identischen Gleichungen (13.) und (41.):

$$(46.) \qquad A_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = \frac{a_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}}{\lambda_2-\lambda_1},$$

wodurch (43.) und (44.) übergehen in:

$$(47.) \qquad (\lambda_2-\lambda_1)^2 = 2(a^2_{200}+a^2_{020}+a^2_{002})+a^2_{011}+a^2_{101}+a^2_{011},$$

$$(48.) \qquad (\lambda_2-\lambda_1)^2 = 3a^2_{200}+(a_{020}-a_{002})^2+a^2_{011}+a^2_{101}+a^2_{011}.$$

Dieses sind die gesuchten Zerlegungen des Quadrates der Differenz $(\lambda_2-\lambda_1)$ in die Summe von 6 oder 5 Quadraten.

Heidelberg, 1862.

Sur les surfaces gauches du troisième degré.

(Par M. *L. Cremona* à Bologne.)

I.

1. Une surface gauche du 3e degré contient toujours une droite double et, *en général*, une autre directrice rectiligne non double. C'est-à-dire, la surface, dont il s'agit, peut, en général, être considérée comme lieu d'une droite mobile qui s'appuie sur une conique plane et sur deux droites, dont l'une (la droite double) ait un point commun avec la conique.

Mais il y a une surface gauche particulière (du 3e degré), dans laquelle les deux directrices rectilignes coïncident. M. *Cayley* a eu la bonté de me communiquer la découverte de ce cas singulier. Dans sa lettre du 12 juin 1861 l'illustre géomètre donne, pour cette surface particulière, la construction géométrique qui suit:

„Prenons une courbe cubique plane avec un point double; menons par „ce point une droite quelconque et supposons que les plans A, B, C, ... „menés par cette droite correspondent anharmoniquement aux points a, b, c, ... „de la même droite; alors, si par un point m quelconque de la droite on mène „dans le plan correspondant M une droite qui rencontre la courbe cubique, „le lieu de cette droite sera la surface gauche du 3e ordre ....“

Dans ce petit travail, j'ai l'intention de déduire cette surface particulière de la théorie générale que j'ai exposée dans mon mémoire *„Sulle superficie gobbe del terz' ordine“* *).

2. On doit à M. *Salmon* **) une proposition très-importante, qui est fondamentale dans la théorie des surfaces réglées. Cette proposition répond à la question: „Quel est l'ordre de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois directrices données?“ C'est-à-dire: en combien de points cette surface est-elle percée par une droite arbitraire R? Soit m, m', m'' les ordres des lignes directrices données. La question revient à chercher le nombre des points où la courbe (m) rencontre la surface gauche dont les directrices soient les courbes (m'), (m'') et la droite R. Ce nombre sera le produit de m par l'ordre de cette dernière surface.

*) Atti del R. Instituto Lombardo, vol. II, 1861.
**) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. VIII, 1853.

Pareillement, l'ordre de cette surface sera le produit de m' par l'ordre d'une surface gauche, dont les directrices soient (m''), R et une autre droite R'. Et de même l'ordre de cette nouvelle surface sera égal au produit de m'' par l'ordre d'une surface gauche qui ait pour directrices trois droites R, R', R''.

Donc, l'ordre de la surface dont les directrices sont les lignes (m), (m'), (m'') est, *en général*, $2mm'm''$.

Je dis *en général*, car ce nombre s'abaisse, lorsque les directrices ont des points communs, deux à deux. Si, par exemple, les courbes (m'), (m'') ont r points communs, la surface dont les directrices sont (m''), R, R' est rencontrée par la courbe (m') en $2m'm''-r$ autres points, seulement; et par conséquent, l'ordre de la surface demandée sera $2mm'm''-rm$. Si, outre cela, la courbe (m) a r' points communs avec la courbe (m'') et r'' points communs avec (m'), l'ordre de la surface réglée, dont les directrices sont (m), (m'), (m''), sera

$$2mm'm''-rm-r'm'-r''m''.$$

On peut regarder tout point p de la courbe (m) comme sommet d'un cône passant par la courbe (m') et d'un autre cône qui ait pour directrice la ligne (m''). Les $m'm''$ droites communes à ces cônes sont des génératrices de la surface dont il s'agit, et sont les seules qui passent par p. Donc, pour cette surface, les directrices (m), (m'), (m'') sont des lignes multiples et leur multiplicité s'élève aux degrés $m'm''$, $m''m$, mm' respectivement.

Lorsque les directrices ont, deux à deux, r, r', r'' points communs, ces degrés de multiplicité deviennent

$$m'm''-r, \quad m''m-r', \quad mm'-r''.$$

Mais, si l'on a $m''=1$, c'est-à-dire, que l'une des directrices est une droite R, et si l'on prend un point p de cette droite comme sommet de deux cônes passant par les courbes (m), (m') respectivement, cette droite est une génératrice multiple, dont la multiplicité est du degré r' pour le premier cône et du degré r pour l'autre; donc la multiplicité de R pour la surface gauche est du degré $mm'-r''-rr'$.

3. En vertu de ces principes généraux, si les directrices sont deux coniques C, C' et une droite D, ayant, deux à deux, un point commun, la surface gauche est du 3e degré; D est la droite double; C, C' sont des lignes simples. Toute surface gauche cubique admet cette génération, savoir:

Une surface gauche quelconque du 3e degré peut être engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois directrices, une droite et deux coniques, qui aient, deux à deux, un point commun.

En général, en chaque point p de la droite double D se croisent deux géneratrices, dont le plan tourne autour d'une droite fixe E, qui est la deuxième directrice rectiligne (non double). Ces deux génératrices, avec la droite double, déterminent deux plans qui sont tangens à la surface en p. Mais il y a, sur la droite D, deux points (réels ou imaginaires) qu'on peut nommer *cuspidaux:* en chacun de ces points il y a un seul plan tangent et une seule génératrice; et le long de ces deux génératrices particulières, la surface est touchée par deux plans qui passent par la deuxième directrice E.

On a donc quatre plans tangens, essentiellement distincts de tous les autres, savoir, les deux plans tangens aux points cuspidaux, et les plans tangens le long des génératrices correspondantes aux points cuspidaux. Ces plans sont tous réels ou tous imaginaires ensemble; et si l'on rapporte la surface au tétraëdre formé par eux, on a l'équation très-simple:

$$x^2 z - w^2 y = 0.$$

4. Dans le cas singulier, signalé par M. *Cayley*, les droites D, E coïncident en une seule, D, et les quatre plans dont il a été question ci-dessus se réduisent à un plan unique. Pour obtenir cette surface particulière, il suffit de supposer que les coniques C, C' soient touchées par un même plan π, passant par D. Dans ce cas, les deux cônes ayant pour bases les courbes C, C' et pour sommet commun un point quelconque p de D, se touchent entr'eux le long de la droite D; donc, l'une des deux génératrices de la surface gauche, qui, dans le cas général, se croisent en p, se confond actuellement avec D; l'autre seule est différente de D. De même, l'un des deux plans qui, en général, sont tangens à la surface en p coïncide dans ce cas avec π, quelque soit p. Et il y a un seul point (cuspidal) de D, où les génératrices coïncident toutes deux avec D, et les deux plans tangens coïncident avec π.

On obtient aussi d'une autre manière ce cas singulier. Dans mon mémoire „*Sur quelques propriétés des courbes gauches de troisième ordre et classe*" (tom. 58 de ce journal), j'ai démontré que, si l'on donne deux séries projectives de points sur une droite E et sur une conique C, non situées dans un même plan, les droites qui joignent les couples de points homologues forment une surface cubique, dont la droite double est une droite D appuyée en un point sur la conique C, et la deuxième directrice rectiligne est E. Mais si la droite donnée E est elle-même appuyée en un point sur la conique C, on a precisément la surface de M. *Cayley*. C'est-à-dire, que l'on

peut considérer cette surface comme lieu des droites qui joignent les points correspondans de deux séries projectives données, l'une sur une droite D, l'autre sur une conique C appuyée en un point a sur la droite D.

Si l'on considère ce point a comme appartenant à D et que l'on désigne par a' son homologue en C, la droite aa' est une génératrice de la surface. Et si l'on désigne par o' ce même point a considéré comme appartenant à C, son homologue o sur D sera le point cuspidal, savoir le point où la génératrice coïncide avec D.

5. Au moyen du principe de dualité, on conclut de ce qui précède, d'autres moyens d'engendrer la surface dont nous nous occupons.

Concevons deux cônes de 2^{d} degré touchés par un même plan donné et par une même droite donnée E. Qu'une droite mobile rencontre toujours cette droite E et se maintienne tangente aux deux cônes, elle engendrera une surface gauche cubique, dont E est, en général, la directrice non double; c'est-à-dire que tout plan mené par E coupe la surface suivant deux génératrices qui se croisent sur une droite fixe D (la droite double). — Si la droite donnée touche dans un même point les deux cônes, les droites D, E coïncident, et on a la surface particulière de M. *Cayley*.

Concevons en second lieu une droite D et un cône de 2^{d} degré; les plans menés par D correspondent anharmoniquement aux plans tangens du cône. Les droites, suivant lesquelles s'entrecoupent les plans homologues forment une surface gauche cubique, qui a pour droite double la droite donnée, mais qui, en général, admet une autre directrice rectiligne. Cette surface se réduit à celle de M. *Cayley*, lorsque la droite D est tangente au cône donné.

II.

6. Je saisis cette occasion pour énoncer quelques propriétés de la surface gauche générale du 3e degré: propriétés qui ne me semblent pas dépourvues d'intérêt.

Soit m un point quelconque de la surface gauche cubique Σ, et m' le pôle de la génératrice passant par m, relatif à la conique, suivant laquelle la surface est coupée par le plan tangent en m. J'ai démontré dans mon mémoire déjà cité *) que, si m parcourt la surface Σ, le pôle correspondant m' décrit une autre surface gauche cubique Σ', et les deux surfaces Σ, Σ'

*) Atti del R. Instituto Lombardo, vol. II.

ont cette propriété que le tétraèdre fondamental dont il a été question à la fin du n°. 3 leur est commun.

(Dans la surface gauche cubique particulière qui a une seule directrice rectiligne, si m parcourt une génératrice, le pôle m' décrit une droite qui passe toujours par le point cuspidal et est située dans le plan tangent à la surface le long de la droite double. Donc, dans ce cas, ce plan considéré comme l'assemblage de droites, en nombre infini, menées par le point cuspidal, est le lieu complet des pôles m').

On peut aussi obtenir la surface Σ' de cette autre manière. Soit M un plan tangent quelconque de la surface donnée Σ, et M' le plan polaire de la génératrice contenue en M, relatif au cône du 2^{d} degré circonscrit à Σ et ayant pour sommet le point de contact du plan M. Si ce plan glisse sur la surface Σ, l'enveloppe du plan M' est la surface Σ'.

Un plan arbitraire P coupe la surface Σ suivant une courbe du 3e ordre et de la 4e classe. Les pôles correspondans aux points de cette courbe se trouvent dans une autre courbe plane de même ordre et classe, qui est l'intersection de la surface Σ' avec un certain plan P'. En variant simultanément, les plans P, P' engendrent deux figures homographiques, dans lesquelles la surface Σ' correspond à la surface Σ, et le tétraèdre fondamental (n°. 3) correspond à soi-même. Voici la relation entre deux points homologues p, p' de ces figures: les plans tangens à Σ menés par p forment un cône de 4e ordre et 3e classe, et les plans polaires correspondans forment un autre cône de même ordre et classe, circonscrit à Σ' et ayant son sommet en p'.

Si le pôle m' s'éloigne à l'infini, la conique située dans le plan tangent en m a son centre sur la génératrice qui passe par ce point; donc, par toute génératrice de la surface gauche cubique on peut mener un plan coupant la surface suivant une conique, dont le centre soit sur la génératrice. Les plans des coniques analogues forment une développable de 4e classe et 6e ordre, circonscrite à la surface gauche donnée suivant une courbe plane. Le plan de cette courbe de contact est ce que devient P, lorsque P' s'éloigne à l'infini, dans les deux figures homographiques mentionnées ci-dessus.

7. Proposons nous cette question: parmi les coniques, en nombre doublement infini, suivant lesquelles la surface gauche cubique est coupée par ses plans tangens, y a-t-il des cercles?

Toutes les sphères sont coupées par le plan à l'infini suivant un même cercle (imaginaire) constant; je le désignerai par C_i. Réciproquement, toute

surface de 2^{d} ordre passant par le cercle C_i est une sphère. Par conséquent, toute conique plane ayant deux points à l'infini sur C_i est une circonférence de cercle.

Le plan à l'infini coupe notre surface cubique gauche suivant une courbe L_i de 3e ordre et 4e classe, ayant un point double à l'intersection de la droite double. La courbe L_i rencontre le cercle imaginaire C_i en six points imaginaires situés, deux à deux, sur trois droites réelles. Soit R une de ces droites; soient ω, ω' les points (imaginaires) où elle rencontre simultanément C_i et L_i; r le troisième point (réel) où R coupe la cubique L_i. La génératrice de la surface Σ qui aboutit en r détermine, avec R, un plan tangent à la surface; ce plan coupe évidemment Σ suivant une conique dont les points à l'infini sont ω, ω', c'est-à-dire, suivant un cercle. De même pour les deux autres droites analogues à R, donc:

Parmi les coniques planes inscrites dans une surface gauche du 3e degré, il y a trois cercles.

Ces cercles se réduisent à *deux* seulement, lorsque le plan à l'infini est lui-même tangent à la surface, c'est-à-dire, lorsque la surface a une génératrice à l'infini.

8. Autre question: par une génératrice donné de la surface cubique gauche peut-on mener un plan qui coupe la surface suivant une hyperbole équilatère?

L'hyperbole équilatère est une conique dont les points à l'infini sont conjugués harmoniques par rapport au cercle imaginaire C_i.

Soit a le point où la génératrice donnée rencontre le plan à l'infini. La question revient donc à la suivante: Par un point donné a d'une cubique L_i mener une droite qui rencontre L_i et une conique donnée C_i en quatre points harmoniques. Ce problème admet, comme on sait, trois solutions; donc:

Par toute génératrice d'une surface gauche cubique on peut mener trois plans qui coupent la surface suivant des hyperboles équilatères.

9. Considérons maintenant les plans qui coupent la surface Σ suivant des paraboles.

Toute droite ab, à l'infini, qui soit tangente à la cubique L_i en un point a, rencontre cette courbe en un autre point b. La génératrice de Σ, aboutissant à b, détermine, avec la droite ab, un plan qui coupe la surface suivant une conique tangente en a à la droite ab, c'est-à-dire, suivant une parabole; car une parabole n'est autre chose qu'une conique ayant une tangente à l'infini.

Par chaque point d'une courbe plane de 3e ordre et 4e classe, telle que L_i, on peut mener deux droites qui touchent la courbe en d'autres points. Ainsi *par toute génératrice de la surface gauche cubique on peut, en général, mener deux plans qui coupent la surface suivant des paraboles;* je les nommerai *plans paraboliques.*

Tous les plans paraboliques enveloppent une développable de 4e classe et 6e ordre, circonscrite à la surface donnée suivant une courbe gauche de 6e ordre.

10. Toutes les coniques inscrites dans la surface Σ et situées dans des plans menés par une même génératrice ont un point commun: c'est le point où la génératrice s'appuie sur la droite double. Par tout autre point de la génératrice passe une seule conique inscrite, dont le plan touche la surface en ce point.

Les deux plans paraboliques (et par conséquent leurs points de contact) passant par une même génératrice donnée peuvent être réels, imaginaires ou coïncidens.

Dans le premier cas, les points de contact des deux plans paraboliques déterminent un segment fini sur la génératrice donnée; tous les points de ce segment sont les points de contact pour des plans tangens qui coupent la surface suivant des ellipses *(plans elliptiques);* tandis que tous les autres points de la génératrice sont les points de contact pour des plans qui coupent la surface suivant des hyperboles *(plans hyperboliques).*

Dans le deuxième cas, tous les plans menés par la génératrice donnée coupent la surface suivant des hyperboles.

Dans le dernier cas, à l'exception d'un seul plan parabolique, tous les plans menés par la génératrice donnent des hyperboles.

Il est superflu d'observer qu'ici on ne considère pas les deux plans tangens qu'on peut faire passer par la génératrice donnée et par l'une ou l'autre directrice rectiligne de la surface.

11. Le point double d'une cubique plane de la 4e classe peut être ou un *point isolé (conjugué),* ou un *node.* Dans le premier cas, tout point de la courbe est l'intersection de deux droites réelles et distinctes qui touchent la courbe en d'autres points. Dans le deuxième cas, le point nodal divise la courbe en deux parties; l'une de ces parties contient le point (réel) d'inflexion. Par chaque point de cette partie (et par aucun des points de l'autre) on peut mener deux droites réelles qui touchent la courbe ailleurs.

La cubique L_i a un node ou un point isolé suivant que le point à l'infini de la droite double est l'intersection de deux génératrices réelles ou

imaginaires. En appliquant ces considérations aux divers cas offerts par les surfaces gauches du 3e degré, on obtient les résultats qui suivent.

1°. *Surface gauche du 3e degré avec deux points cuspidaux réels.* Ici il faut distinguer deux cas possibles. Nommons *a, b* les points cuspidaux.

a) Dans chaque point du segment fini *ab* (et dans aucun autre point de la droite double) se croisent deux génératrices réelles. Dans ce cas, par chaque génératrice de la surface passent deux plans paraboliques réels.

b) Les génératrices réelles se croisent, deux à deux, *exclusivement* sur les deux segmens infinis de la droite double, dont l'un commence en *a*, et l'autre en *b*. Dans ce cas, par toute génératrice appuyée sur l'un des segmens infinis, passent deux plans paraboliques réels; tandis que tous les plans menés par les génératrices appuyées sur l'autre segment infini sont hyperboliques. Dans ce même cas, il y a deux génératrices (réelles) parallèles à la droite double; par chacune de ces deux génératrices passe un seul plan parabolique.

2°. *Surface gauche du 3e degré sans points cuspidaux réels.* Tout point de la droite double est l'intersection de deux génératrices réelles: deux plans paraboliques réels passent par l'une d'elles, aucun par l'autre. Il y a, aussi dans ce cas, deux génératrices (réelles) parallèles à la droite double; par chacune de ces génératrices passe un seul plan parabolique.

Voilà les seuls cas possibles de la surface gauche cubique *générale*, c. a. d. de celle qui a deux directrices rectilignes distinctes. Venons maintenant au cas particulier de M. *Cayley*.

3°. *Surface gauche du 3e degré avec un seul point cuspidal.* La droite double, dans chacun de ses points, est rencontrée par une génératrice (réelle). Le point cuspidal divise la droite double en deux segmens infinis. Deux plans paraboliques réels passent par toute génératrice appuyée sur l'un de ces segmens; aucun par les génératrices appuyées sur l'autre segment. Il y a une génératrice parallèle à la droite double: par cette génératrice passe un seul plan parabolique.

Il serait maintenant bien facile d'établir les modifications que ces résultats subissent dans les cas où le plan à l'infini aurait une position particulière par rapport à la surface; j'en laisse le soin au lecteur.

Bologne, 1er septembre 1861.

Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale.

(Von Herrn *Mehler* zu Fraustadt.)

Das Problem der Attraction der Ellipsoide, welches für den Fall des *Newton*schen Gesetzes von den Mathematikern auf die verschiedenste Weise behandelt worden ist, ist von *Dirichlet* vermöge der Methode des discontinuirlichen Factors *) bekanntlich auch für den allgemeineren Fall gelöst worden, dass die Anziehung der p^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Formeln sind nur für den Fall entwickelt, dass p zwischen 2 und 3 liegt; aber es findet sich, wenn auch ohne jeden weiteren Zusatz, die Bemerkung, dass auf diesen Fall sich alle übrigen zurückführen lassen. Ebenso wenig wird es *Dirichlet* entgangen sein, dass seine Methode auch ausreichte, um die Anziehung von Körperschalen zu berechnen, deren Grenzflächen von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades irgend welcher Art gebildet werden. Wiewohl nun in der angeführten Abhandlung eine Ausführung dieser Punkte, als dem Zwecke derselben fremd, unterblieb, so scheint mir eine solche doch nicht ohne einiges Interesse zu sein, sowohl wegen der sehr einfachen Resultate, welche für das Ellipsoid, wenn p eine ganze gerade Zahl ist, sich ergeben, als auch darum, weil die Anziehung der hyperboloidischen und der hyperbolisch-paraboloidischen Schalen, auch wenn das *Newton*sche Gesetz gilt, einen wesentlich verschiedenen Charakter hat von der der ellipsoidischen und der elliptisch-paraboloidischen **).

In der Rechnung schlug ich ursprünglich ganz den von *Dirichlet* angegebenen Weg ein, wobei sich die verschiedenen Fälle sehr bald von einander trennten. Durch eine geringe Modification derselben gelangte ich jedoch zu einer Formel, welche alle von Flächen zweiten Grades begrenzte Schalen zugleich umfasst, und woraus sich für jeden besonderen Fall die zweckmässigsten Formen mit Leichtigkeit ergeben. Ausserdem setzte ich ein etwas allgemeineres Anziehungsgesetz voraus, welches alle möglichen Lagen des an-

*) Abhandlungen der Berliner Akademie, Jahrgang 1839.

**) Diese sind von *Bourget* nach der *Chasles*schen Methode behandelt worden. (*Liouville*s Journal, zweite Reihe, Bd. II und III).

gezogenen Punktes auf eine merkwürdige Weise mit einander verknüpft und zugleich ein äusserst einfaches Mittel an die Hand giebt, um aus den Formeln für ein gegebenes p die entsprechenden für ein um zwei Einheiten grösseres herzuleiten.

Um den Gang der Rechnung nicht zu unterbrechen, schicke ich folgende Bemerkung über den Gebrauch der Bruchpotenzen mit imaginärem Argument voraus. Wenn τ nicht negativ ist (und nur dieser Fall kommt vor), so ist $(\tau+\vartheta i)^n$ definirt durch die Gleichung:

$$(\tau+\vartheta i)^n = (\tau^2+\vartheta^2)^{\frac{1}{2}n} e^{in\operatorname{arctg}\left(\frac{\vartheta}{\tau}\right)},$$

worin der arctg zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist. Danach ist, je nachdem $\vartheta > 0$ oder $\vartheta < 0$:

$$(\vartheta i)^n = \vartheta^n e^{i\frac{n\pi}{2}}, \quad \text{oder} \quad (\vartheta i)^n = (-\vartheta)^n e^{-i\frac{n\pi}{2}},$$

und es gelten die Formeln:

$$i^m . i^n = i^m : (-i)^n = i^{m+n},$$
$$i^m . (-i)^n = i^m : i^n = i^{m-n}.$$

§. 1.

Entwicklung der allgemeinen Formel.

Die Gleichungen:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{\xi^2}{\alpha}+\frac{\eta^2}{\beta}+\frac{\zeta^2}{\gamma}+2\lambda\xi+2\mu\eta+2\nu\zeta = h, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha}+\frac{\eta_1^2}{\beta}+\frac{\zeta_1^2}{\gamma}+2\lambda\xi_1+2\mu\eta_1+2\nu\zeta_1 = k, \end{cases}$$

in welchen stets $h < k$ genommen werden mag, stellen je nach der Beschaffenheit der Constanten α, β, γ, λ, μ, ν zwei ähnliche und ähnlich liegende Flächen zweiten Grades irgend welcher Art dar. Wir denken uns den zwischen beiden enthaltenen Raum mit homogener Materie angefüllt. Setzt man:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}+2\lambda x+2\mu y+2\nu z = u,$$

so ist die Ungleichheit:

$$(2.) \quad h < u < k$$

die Bedingung dafür, dass ein Punkt (x, y, z) der Masse der Schale angehöre. Die Coordinaten des angezogenen Punktes seien a, b, c und r seine Entfernung von (x, y, z), so dass:

$$r^2 = (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2.$$

Wenn ein in (x, y, z) befindliches Massenelement dm den Punkt (a, b, c) mit der Kraft $\frac{dm}{r^p}$ anzieht, so ist $\frac{1}{p-1}\frac{dm}{r^{p-1}}$ das Potential der Elementaranziehung. Nimmt man statt dieser beiden Ausdrücke die allgemeineren:

$$\frac{r\,dm}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p+1)}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{p-1}\frac{dm}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

worin ω eine nicht negative Constante bedeutet, so ist das Potential T der Gesammtanziehung der Schale, die Dichtigkeit der Materie gleich 1 vorausgesetzt:

$$(3.) \qquad T = \frac{1}{p-1}\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}}.$$

Die Integrationen erstrecken sich auf alle Werthe von x, y, z, welche der Ungleichheit (2.) genügen. Man kann indessen alle drei Integrationen zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ vollziehen, wenn man die Function unter den Integralzeichen zuvor mit einem Factor multiplicirt, der sich auf 1 reducirt, wenn u zwischen h und k, dagegen auf 0, wenn u ausserhalb dieses Intervalles liegt. Ein solcher Factor ist nach dem *Fourier*schen Satze das Doppelintegral:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \int_h^k \cos\varphi(\varepsilon-u)\,d\varepsilon,$$

dessen Werth gleich ist dem reellen Theile des einfachen Integrales:

$$\frac{i}{\pi}\int_0^\infty e^{-u\varphi i}(e^{h\varphi i}-e^{k\varphi i})\frac{d\varphi}{\varphi}.$$

Also ist:

$$T = \text{Reel}: \frac{i}{\pi(p-1)}\int_0^\infty (e^{h\varphi i}-e^{k\varphi i})\frac{d\varphi}{\varphi}\int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x}\frac{e^{-u\varphi i}\,dx\,dy\,dz}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

vorausgesetzt, dass der Zusatz Reel: vor irgend einem Ausdrucke bedeutet, dass von demselben nur der reelle Theil genommen werden darf. Ersetzt man jetzt die Potenz von $r^2+\omega$ durch ein bestimmtes Integral vermittelst der für jedes die Einheit übersteigende p gültigen Formel *):

$$\frac{1}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-(r^2+\omega)\psi}\psi^{\frac{1}{2}(p-3)}\,d\psi,$$

führt darauf für u und r^2 ihre Werthe ein, und setzt noch $\psi = \frac{\varphi}{s}$, so sind die Integrationen nach x, y, z, φ nach einander ausführbar, und man erhält, wenn

*) Diese Substitution weicht ab von derjenigen, welche *Dirichlet* anwandte.

$$\Delta(s) = \left(1+\frac{si}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{si}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{si}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(s) = \frac{\omega}{s}+\frac{a^2+2\lambda\alpha a-\lambda^2\alpha si}{s-\alpha i}+\frac{b^2+2\mu\beta b-\mu^2\beta si}{s-\beta i}+\frac{c^2+2\nu\gamma c-\nu^2\gamma si}{s-\gamma i}$$

gesetzt wird,

$$(4.)\quad T = \text{Reel}:\frac{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}}{\Delta(s)}\left\{(f(s)-hi)^{2-\frac{1}{2}p}-(f(s)-ki)^{2-\frac{1}{2}p}\right\}.$$

Diese Formel gilt ihrer Herleitung gemäss, wenn $\omega > 0$ ist, und man von dem Falle absieht, dass mehrere der Grössen α, β, γ unendlich grosse Werthe haben, für jedes p, das > 2 ist; wenn aber $\omega = 0$ ist, in welchem Falle die Function unter dem Integralzeichen für $s = 0$ unendlich gross wird, so muss p zwischen 2 und 4 enthalten sein.

Wollte man die rechte Seite der Gleichung (4.) unmittelbar auf ihren reellen Theil reduciren, so würde man eine zwar alle verschiedenen Fälle umfassende, aber sehr ungeschickte Formel erhalten. Man muss daher den Ausdruck des T zuvor passend transformiren. Schreibt man $\frac{s}{t}$ statt des Integrationsbuchstabens s, indem man unter t eine positive Zahl versteht, so wird:

$$T = \text{Reel}:\frac{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\,t^{\frac{1}{2}(p-1)}\int_0^\infty \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\left\{\left(f\left(\frac{s}{t}\right)-hi\right)^{2-\frac{1}{2}p}-\left(f\left(\frac{s}{t}\right)-ki\right)^{2-\frac{1}{2}p}\right\}}{\left(t+\frac{si}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{si}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{si}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist constant für jedes reelle positive von Null verschiedene t, und sie bleibt einwerthig, stetig und endlich, wenn statt t eine imaginäre Zahl $\tau+\vartheta i$ mit positivem reellen Theile τ gesetzt wird. Daher ändert sie nach bekannten Sätzen ihren Werth auch nicht, wenn man $t = \tau+\vartheta i$ setzt, und man darf sogar $\tau = 0$ nehmen, wenn das Integral bis $\tau = 0$ inclusive stetig ist. Dieses ist aber, wie sich leicht in aller Strenge nachweisen liesse, immer der Fall, sobald nur das Integral für $\tau = 0$ noch einen Sinn behält. Unter dieser Voraussetzung darf man insbesondere $t = i$ und $t = -i$ nehmen, und man erhält dadurch, wenn man:

$$(5.)\quad S = \frac{\omega}{s}+\frac{a^2+2\lambda\alpha a-\lambda^2\alpha s}{\alpha+s}+\frac{b^2+2\mu\beta b-\mu^2\beta s}{\beta+s}+\frac{c^2+2\nu\gamma c-\nu^2\gamma s}{\gamma+s},$$

$$(5'.)\quad S' = -\frac{\omega}{s}+\frac{a^2+2\lambda\alpha a+\lambda^2\alpha s}{\alpha-s}+\frac{b^2+2\mu\beta b+\mu^2\beta s}{\beta-s}+\frac{c^2+2\nu\gamma c+\nu^2\gamma s}{\gamma-s}$$

setzt, für T die beiden in der Form nicht unwesentlich verschiedenen Aus-

drücke:

$$(6.)\quad T = \text{Reel}: \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} i^{\frac{1}{2}(p+1)} \int_0^\infty \frac{ds\,.\,s^{1-\frac{1}{2}p}\left\{[(S-h)i]^{2-\frac{1}{2}p} - [(S-k)i]^{2-\frac{1}{2}p}\right\}}{\left[\left(1+\frac{s}{\alpha}\right)i\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{s}{\beta}\right)i\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)i\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$(6'.)\quad T = \text{Reel}: \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} i^{\frac{1}{2}(3-p)} \int_0^\infty \frac{ds\,.\,s^{1-\frac{1}{2}p}\left\{[(S'-h)i]^{2-\frac{1}{2}p} - [(S'-k)i]^{2-\frac{1}{2}p}\right\}}{\left[\left(\frac{s}{\alpha}-1\right)i\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{s}{\beta}-1\right)i\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{s}{\gamma}-1\right)i\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke auf ihre reellen Theile reducirt, so nehmen die Integrale keine complicirtere Gestalt an; aber jetzt trennen sich die Fälle der ellipsoidischen und der hyperboloidischen Schalen von einander.

§. 2.

Ausdruck des T für ellipsoidische Schalen.

Wenn die Grössen α, β, γ alle drei positiv sind, so stellen die Gleichungen (1.) im Allgemeinen, d. h. sofern keine jener drei Grössen unendlich gross ist, zwei ähnliche Ellipsoide dar, von denen das erste vom zweiten umschlossen wird. Die Halbaxen derselben werden erhalten, wenn man $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ resp. mit den Quadratwurzeln aus:

$$h+\lambda^2\alpha+\mu^2\beta+\nu^2\gamma \quad \text{und} \quad k+\lambda^2\alpha+\mu^2\beta+\nu^2\gamma$$

multiplicirt, woraus beiläufig folgt, dass diese Grössen gleichfalls positiv sein müssen. Die Gleichung (6.) verdient hier vor (6'.) den Vorzug und liefert:

$$(7.)\quad T = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\left[\int_\sigma^\infty \frac{ds\,.\,s^{1-\frac{1}{2}p}(k-S)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta} - \int_\varrho^\infty \frac{ds.\,s^{1-\frac{1}{2}p}(h-S)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta}\right].$$

Hierin ist:

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha}\right)\left(1+\frac{s}{\beta}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)},$$

es muss $p<6$ sein, und es bedeuten ϱ und σ die positiven Wurzeln der Gleichungen vierten Grades:

$$(8.)\quad S=h \quad \text{und} \quad S=k.$$

Da diese Wurzeln, wenn $\omega>0$, für jedes a, b, c existiren, so gilt der Ausdruck (7.) gleichmässig für jede Lage des angezogenen Punktes, und erst, wenn $\omega=0$ gesetzt wird, nimmt er für die verschiedenen Lagen eine wesentlich verschiedene Form an. Nimmt man zunächst ω unendlich klein und be-

zeichnet durch E den Werth von $S-\frac{\omega}{s}$ für $s=0$, so dass:

$$E=\frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}+2\lambda a+2\mu b+2\nu c,$$

so haben die Gleichungen (8.) je eine unendlich kleine Wurzel, nämlich:

$$(9.)\qquad \varrho=\frac{\omega}{h-E} \quad \text{und} \quad \sigma=\frac{\omega}{k-E};$$

aber diese dürfen nur dann als die wahren Werthe von ϱ und σ betrachtet werden, wenn sie positiv sind, und im entgegengesetzten Falle treten an ihre Stelle die endlichen positiven Wurzeln der kubischen Gleichungen, welche aus (8.) für $\omega=0$ hervorgehen. Daraus folgt leicht, dass für einen Punkt im Innern des kleineren Ellipsoides ϱ und σ beide zugleich mit ω sich auf Null reduciren, für einen der Masse angehörigen Punkt dagegen nur σ, und für einen äusseren Punkt keine von beiden.

Es bedarf keiner Ausführung, wie die Formel (7.), indem man für α, β, γ auch unendlich grosse Werthe zulässt, auf Schalen angewandt werden kann, welche von congruenten elliptischen Paraboloiden oder von ähnlichen elliptischen oder congruenten parabolischen Cylindern, oder selbst von zwei oder einem Paare paralleler Ebenen begrenzt sind, und es mag nur in Betreff des Umfangs ihrer Gültigkeit bemerkt werden, dass T bei den paraboloidischen und elliptisch-cylindrischen Schalen unendlich gross ist für $p=2$, bei den parabolisch-cylindrischen für $p\leqq 2\frac{1}{2}$, und bei den von parallelen Ebenen begrenzten Platten für $p\leqq 3$. Die Ausdrücke für die Attractionscomponenten, welche, wenn $p<4$, aus (7.) durch blosse Differentiation unter dem Integralzeichen nach a, b, c hervorgehen, könnten auch auf directem Wege gefunden werden, und es würde sich dann zeigen, dass sie in den erwähnten drei Fällen noch resp. bis zu den Werthen $p=1, 1\frac{1}{2}, 2$ excl. Gültigkeit haben. — In den beiden folgenden Paragraphen werden der Einfachheit wegen nur von wirklichen Ellipsoiden begrenzte Schalen betrachtet werden.

§. 3.

Der Fall $p=4$.

Indem man $\lambda, \mu, \nu=0$ setzt, erhält man als Gleichungen der beiden ähnlichen Ellipsoide:

$$\frac{\xi^2}{\alpha}+\frac{\eta^2}{\beta}+\frac{\zeta^2}{\gamma}=h, \qquad \frac{\xi_1^2}{\alpha}+\frac{\eta_1^2}{\beta}+\frac{\zeta_1^2}{\gamma}=k.$$

Die Formel (7.) nimmt für $p=4$ die einfache Gestalt an:

$$(10.) \qquad T = \tfrac{2}{3}\pi \int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{s\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha}\right)\left(1+\frac{s}{\beta}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)}}.$$

Nun haben für ein unendlich kleines ω, wenn der Punkt im inneren hohlen Raume liegt, ϱ und σ die in (9.) befindlichen unendlich kleinen Werthe; also wird in diesem Falle:

$$(10'.) \qquad T = \tfrac{2}{3}\pi \log\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right) = \tfrac{2}{3}\pi \log\left(\frac{k-E}{h-E}\right),$$

worin:

$$E = \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}.$$

Ist der Punkt ein äusserer, so sei $h=0$, so dass die Schale in ein volles Ellipsoid übergeht. Dadurch wird $\varrho=\infty$, es ist σ die endliche positive Wurzel der Gleichung:

$$\frac{a^2}{\alpha+\sigma} + \frac{b^2}{\beta+\sigma} + \frac{c^2}{\gamma+\sigma} = k;$$

und:

$$(10''.) \qquad T = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}\int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{s\sqrt{(\alpha+s)(\beta+s)(\gamma+s)}}.$$

Aus den Formeln (10'.) und (10''.) und den (rein algebraischen) Ausdrücken, welche sich daraus für die Attractionscomponenten ergeben, erkennt man, dass für eine umgekehrt proportional der *vierten* Potenz der Entfernung wirkende Anziehungskraft die folgenden einfachen Sätze gelten:

Die Anziehung einer homogenen, von ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schale auf einen Punkt des inneren Raumes ist normal auf dem durch diesen Punkt gehenden, den gegebenen ähnlichen Ellipsoide. Für verschiedene Punkte derselben Gleichgewichtsfläche ist die Resultante umgekehrt proportional dem Abstand der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkt.

Die Anziehung eines homogenen Ellipsoides auf einen äusseren Punkt ist normal auf dem durch diesen Punkt gehenden, mit dem gegebenen homofocalen Ellipsoide. Für verschiedene Punkte derselben Gleichgewichtsfläche ist die Resultante direct proportional dem Abstand der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkt.

§. 4.

Der Fall $p > 4$.

Man kann den Fall, wo p den Werth 4 überschreitet, sowohl wenn $\omega > 0$, als auch wenn es $= 0$ ist, auf den, wo p zwischen 2 und 4 liegt, zurückführen vermöge eines Verfahrens, das auf Körper von beliebiger Gestalt anwendbar ist. Bedient man sich, um die Werthe des T für denselben anziehenden Körper und denselben angezogenen Punkt, aber verschiedene Werthe des p von einander zu unterscheiden, der Bezeichnung:

$$T_p = \frac{1}{p-1}\int \frac{dm}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}}, \quad \text{so ist:} \quad T_{p+2} = \frac{1}{p+1}\int \frac{dm}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p+1)}},$$

und es findet die Relation Statt:

$$(11.) \qquad T_{p+2} = -\frac{2}{p+1}\frac{\partial T_p}{\partial \omega}.$$

Somit ist für jede ganze positive Zahl n:

$$(11'.) \qquad T_{p+2n} = (-1)^n \frac{2}{p+1}\cdot\frac{2}{p+3}\cdots\frac{2}{p+2n-1}\frac{\partial^n T_p}{\partial \omega^n},$$

wodurch die beabsichtigte Zurückführung erreicht ist. Nun ergiebt sich aus (7.) für ein volles Ellipsoid mit den Halbaxen $\sqrt{\alpha k}$, $\sqrt{\beta k}$, $\sqrt{\gamma k}$ die übrigens noch bis $p = 6$ excl. gültige Formel:

$$T_p = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)} V,$$

worin:

$$V = \int_0^\infty \frac{ds\,.\,s^{2-\frac{1}{2}p}}{s\Delta}\left(k - \frac{a^2}{\alpha+s} - \frac{b^2}{\beta+s} - \frac{c^2}{\gamma+s} - \frac{\omega}{s}\right)^{2-\frac{1}{2}p},$$

$$(12.) \qquad k - \frac{a^2}{\alpha+\sigma} - \frac{b^2}{\beta+\sigma} - \frac{c^2}{\gamma+\sigma} - \frac{\omega}{\sigma} = 0,$$

und die Gleichung (11'.) liefert:

$$T_{p+2n} = \frac{(-1)^n \pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+2n+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\frac{\partial^n V}{\partial \omega^n}.$$

Da es nicht erlaubt ist, die $n$fache Differentiation nach ω unmittelbar unter dem Integralzeichen zu verrichten, so ist V zuvörderst zu transformiren. Denkt man sich s durch eine neue Variable v ausgedrückt vermöge der Gleichung:

$$(13.) \qquad s\left(k - \frac{a^2}{\alpha+s} - \frac{b^2}{\beta+s} - \frac{c^2}{\gamma+s}\right) = v,$$

so wird:

$$V = \int_{\omega}^{\infty} dv\,(v-\omega)^{2-\frac{1}{2}p} \cdot \frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}.$$

Durch theilweise Integration erhält man:

$$V = -\int_{\omega}^{\infty} dv\,\frac{(v-\omega)^{3-\frac{1}{2}p}}{3-\frac{p}{2}}\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}\right).$$

Also ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = \int_{\omega}^{\infty} dv\,(v-\omega)^{2-\frac{1}{2}p}\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}\right),$$

und allgemein:

$$\frac{\partial^n V}{\partial \omega^n} = \int_{\omega}^{\infty} dv\,(v-\omega)^{2-\frac{1}{2}p}\frac{d^n}{dv^n}\left(\frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}\right).$$

Man hat also:

$$(14.)\qquad T_{p+2n} = \frac{(-1)^n \pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+2n+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\int_{\omega}^{\infty} dv\,(v-\omega)^{2-\frac{1}{2}p}\frac{d^n}{dv^n}\left(\frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}\right).$$

Man könnte jetzt v wieder durch s und die Differentiationen nach v successive durch solche nach s ersetzen. Für $p=4$ wird die Integration ausführbar, und man erhält:

$$T_{4+2n} = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(n+\frac{5}{2})}\left[\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left(\frac{1}{s\Delta}\frac{ds}{dv}\right)\right]_{(v=\omega)}.$$

Setzt man:

$$\int_{\tau}^{s}\frac{ds}{s\Delta} = F(s), \quad (\tau \text{ constant}),$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$T_{4+2n} = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(n+\frac{5}{2})}\left(\frac{d^n F(s)}{dv^n}\right)_{(v=\omega)}.$$

Man kann diesem Ausdruck eine passendere Gestalt geben, wenn man $F(s)$ nach Potenzen von $v-\omega$ entwickelt. Bezeichnet, wie bisher, σ die positive, und sind σ_1, σ_2, σ_3 die drei negativen Wurzeln der Gleichung (12.), so lässt sich die Gleichung (13.), nachdem von beiden Seiten ω subtrahirt ist, in der Form schreiben:

$$\frac{k(s-\sigma)(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)(s-\sigma_3)}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)} = v-\omega,$$

oder wenn

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}{(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)(s-\sigma_3)} = f(s)$$

gesetzt wird:

$$s = \sigma + f(s).(v-\omega).$$

Vermöge der *Lagrange*'schen Formel folgt hieraus:

$$F(s) = F(\sigma) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(v-\omega)^\nu}{\nu!} \frac{\partial^{\nu-1} F'(\sigma)(f(\sigma))^\nu}{\partial\sigma^{\nu-1}}.$$

Also ist:

$$\left(\frac{d^n F(s)}{dv^n}\right)_{(v=\omega)} = \frac{\partial^{n-1} F'(\sigma)(f(\sigma))^n}{\partial\sigma^{n-1}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck und setzt für $F'(\sigma)$ und $f(\sigma)$ ihre Werthe ein, so erhält man:

$$(15.) \qquad T_{4+2n} = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{2k^n \Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}}\left[\frac{\{(\sigma+\alpha)(\sigma+\beta)(\sigma+\gamma)\}^{n-\frac{1}{2}}}{\sigma\{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)\}^n}\right].$$

Diese Formel gilt für einen der Masse angehörigen Punkt ebenso, wie für einen äusseren, und die Differenz zweier Ausdrücke der nämlichen Form würde das Potential einer ellipsoidischen Schale gleichfalls für jede Lage des angezogenen Punktes darstellen. Allein, wenn man dann $\omega = 0$ setzt, d. h. die Anziehung proportional der $(-4-2n)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung werden lässt, so wird T für einen Punkt in der Masse der Schale, wegen $\sigma = 0$, unendlich gross, und erscheint unter der Form $\infty - \infty$ für einen Punkt der inneren Höhlung. Wir benutzen bei diesem Anziehungsgesetz die Gleichung (15.) nur für ein volles Ellipsoid und einen äusseren Punkt. Es reducirt sich dann eine der negativen Wurzeln der Gleichung (12.), z. B. σ_3, auf Null, und wenn man ausserdem $k=1$ nimmt, durch M die Masse des Ellipsoides bezeichnet und für $\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)$ die bekannte Entwicklung setzt, so wird:

$$(15'.) \qquad T_{4+2n} = \frac{(-2)^{n-1}M}{5.7\ldots(2n+3)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}}\left[\frac{\{(\sigma+\alpha)(\sigma+\beta)(\sigma+\gamma)\}^{n-\frac{1}{2}}}{\sigma^{n+1}\{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)\}^n}\right].$$

Denkt man sich durch (a, b, c) die drei orthogonalen Flächen zweiten Grades gelegt, welche mit dem gegebenen Ellipsoide homofocal sind, und nennt P, P_1, P_2 die vom Mittelpunkt auf die drei Tangentialebenen in (a, b, c) gefällten Lothe, so dass z. B.:

$$P = \left\{\frac{a^2}{(\alpha+\sigma)^2} + \frac{b^2}{(\beta+\sigma)^2} + \frac{c^2}{(\gamma+\sigma)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

so sind, wie man sich leicht überzeugen wird, die Ausdrücke

$$2P\frac{\partial T_{4+2n}}{\partial\sigma}, \qquad 2P_1\frac{\partial T_{4+2n}}{\partial\sigma_1}, \qquad 2P_2\frac{\partial T_{4+2n}}{\partial\sigma_2}$$

gleich den Projectionen der Resultante der Anziehung auf die Normalen jener drei Flächen.

An die Stelle von (11.) tritt, wenn $\omega = 0$ ist und (a, b, c) nicht der Masse des anziehenden Körpers angehört, die folgende leicht zu verificirende Relation:

$$(16.) \qquad T_{p+2} = \frac{1}{(p-2)(p+1)}\left(\frac{\partial^2 T_p}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial c^2}\right).$$

Wir wenden dieselbe an auf die allgemeine Bestimmung des Potentials einer ellipsoidischen Schale auf einen Punkt des inneren hohlen Raumes. Für diesen Fall erhält man aus (7.):

$$T_p = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty ds.\, s^{1-\frac{1}{2}p}\,\frac{K^{2-\frac{1}{2}p} - H^{2-\frac{1}{2}p}}{\left(2-\frac{p}{2}\right)\Delta},$$

worin

$$K = k - \frac{a^2}{\alpha+s} - \frac{b^2}{\beta+s} - \frac{c^2}{\gamma+s},$$

und H aus K durch Verwandlung von k in h hervorgeht. Hier ist es erlaubt, die Differentiationen nach a, b, c unter dem Integralzeichen vorzunehmen. Nun findet man durch wirkliche Differentiirung:

$$\frac{1}{\left(2-\frac{p}{2}\right)\Delta}\left(\frac{\partial^2 K^{2-\frac{1}{2}p}}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 K^{2-\frac{1}{2}p}}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 K^{2-\frac{1}{2}p}}{\partial c^2}\right) = 4\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K^{1-\frac{1}{2}p}}{\Delta}\right).$$

Folglich ist vermöge (16.) zunächst:

$$T_{p+2} = \frac{(-1)^1\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty ds.\, s^{1-\frac{1}{2}p}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K^{1-\frac{1}{2}p} - H^{1-\frac{1}{2}p}}{\left(1-\frac{p}{2}\right)\Delta}\right),$$

und durch fortgesetzte Anwendung desselben Verfahrens findet man:

$$(14'.) \qquad T_{p+2n} = \frac{(-1)^n\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+2n+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty ds.\, s^{1-\frac{1}{2}p}\,\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{K^{2-\frac{1}{2}p-n} - H^{2-\frac{1}{2}p-n}}{\left(2-\frac{p}{2}-n\right)\Delta}\right).$$

Die Integration wird ausführbar, wenn man $p=2$ setzt. Schreibt man gleichzeitig $n+1$ an die Stelle von n, so ergiebt sich:

$$(15''.) \qquad T_{4+2n} = \frac{(-2)^{n+1}\pi}{1.3\ldots(2n+3)}\,\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{K^{-n} - H^{-n}}{n\Delta}\right)_{(s=0)}.$$

Es ist offenbar, dass dieser Ausdruck, nachdem die Differentiation vollzogen und $s=0$ gesetzt ist, die Grössen a, b, c, α, β, γ nur in rationalen Ver-

bindungen enthält. — Vermöge der Formeln (15″.) und (15′.) hat man also das folgende einfache Resultat:

Wenn die Anziehung umgekehrt proportional der 6ten, 8ten, 10ten ... Potenz der Entfernung ist, so ist die Potentialfunction einer von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schale eine algebraische Function der Coordinaten des angezogenen Punktes, und diese Function ist rational oder von den Wurzeln zweier cubischen Gleichungen abhängig, je nachdem der Punkt innerhalb des von der kleineren oder ausserhalb des von der grösseren Grenzfläche umschlossenen Raumes liegt.

§. 5.

Allgemeine Formeln für die hyperboloidischen Schalen.

Um die hyperboloidischen Schalen und die, welche als Grenzfälle derselben, aber nicht als solche der ellipsoidischen, betrachtet werden können, zu erschöpfen, genügt es, dass man *eine* der drei Grössen α, β, γ, z. B. γ, negativ nimmt, oder, was dasselbe ist, $-\gamma$ an die Stelle von γ schreibt. Man darf ferner, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, stets $\alpha > \beta$ und $\mu = \nu = 0$ annehmen, so dass die Gleichungen (1.) übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} - \frac{\zeta^2}{\gamma} + 2\lambda\xi &= h, \\ \frac{\xi_1^2}{\alpha} + \frac{\eta_1^2}{\beta} - \frac{\zeta_1^2}{\gamma} + 2\lambda\xi_1 &= k, \end{aligned}\right\} \qquad (k-h>0).$$

Wenn dieselben zwei wirkliche Hyperboloide darstellen, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes beider: $-\lambda\alpha$, 0, 0, und die Quadrate ihrer Halbaxen werden erhalten, wenn man α, β, γ respective mit $h+\lambda^2\alpha$ und $k+\lambda^2\alpha$ multiplicirt. Sind nun die letzteren Grössen beide positiv, so sind die Hyperboloide offenbar beide einfach; sie sind beide zweifach, wenn jene Grössen beide negativ sind; und das erste ist zweifach, das zweite dagegen einfach, wenn $h+\lambda^2\alpha<0$, aber $k+\lambda^2\alpha>0$. Im letzten Falle sind die Hyperboloide zwar nicht ähnlich im gewöhnlichen Sinne des Wortes; aber sie haben, wie in den beiden anderen, denselben Asymptotenkegel, und die allgemeinen Formeln gelten auch für die von solchen Flächen begrenzten Schalen. Wird $\alpha = \infty$, so entstehen aus zwei einfachen Hyperboloiden zwei congruente hyperbolische Paraboloide, und ist $\alpha = \infty$ und $\lambda = 0$, so ist die Schale begrenzt von ähnlichen hyperbolischen Cylindern. — Setzt man

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} - \frac{c^2}{\gamma} + 2\lambda a = G,$$

so liegt, wenn $h-G<0$ und $k-G>0$, der Punkt (a, b, c) *in der Masse* der Schale. Wir werden sagen, er sei ein *innerer*, wenn $h-G>0$, und er sei ein *äusserer*, wenn $k-G<0$. Hiernach gehört der Mittelpunkt, für welchen $G=-\lambda^2\alpha$, bei den einfach-hyperboloidischen Schalen dem inneren und bei den zweifach-hyperboloidischen dem äusseren Raume an. Bei den hyperbolisch-paraboloidischen Schalen lässt sich ein solches unterscheidendes geometrisches Merkmal nicht angeben, indem z. B., wenn $\beta=\gamma$, die hier als innerer und äusserer bezeichneten Räume einander congruent sind.

Die Function S in (5.), welche jetzt übergeht in:

$$S=\frac{\omega}{s}+\frac{a^2+2\lambda\alpha a-\lambda^2\alpha s}{s+\alpha}+\frac{b^2}{s+\beta}+\frac{c^2}{s-\gamma},$$

nimmt mit wachsendem s continuirlich ab, ausser an den Stellen $s=-\alpha, -\beta, 0, \gamma$, an welchen sie plötzlich von $-\infty$ auf $+\infty$ überspringt. Sie durchläuft also alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ in jedem der Intervalle: $-\alpha$ bis $-\beta$, $-\beta$ bis 0, 0 bis γ, γ über $\pm\infty$ bis $-\alpha$. Die Gleichung

$$S-h=0$$

hat also stets vier reelle Wurzeln, welche ϱ_3, ϱ_2, ϱ_1, ϱ_0 heissen mögen, und die Rangordnung derselben wird, je nachdem $-h-\lambda^2\alpha$, der Werth des $S-h$ für $s=\pm\infty$, negativ oder positiv, d. h. je nachdem die innere Grenzfläche ein einfaches oder zweifaches Hyperboloid ist, bestimmt durch die erste oder zweite der folgenden Ungleichheiten:

$$-\alpha<\varrho_3<-\beta<\varrho_2<\quad 0<\varrho_1<\gamma<\varrho_0<\infty,$$
$$-\infty<\varrho_0<-\alpha<\varrho_3<-\beta<\varrho_2<0<\varrho_1<\gamma.$$

Für ein unendlich kleines ω hat eine der Wurzeln den unendlich kleinen Werth $\frac{\omega}{h-G}$, welcher positiv ist für einen inneren, negativ für einen äusseren Punkt. Daher hat man, wenn $\omega=0$ ist, zu setzen:

$\varrho_1=0$ für einen inneren, aber $\varrho_2=0$ für einen äusseren Punkt.

Ganz ebenso ist das Verhalten der Wurzeln σ_3, σ_2, σ_1, σ_0 der Gleichung

$$S-k=0,$$

und es ist zu bemerken, dass jedes σ kleiner ist, als das demselben Intervalle angehörige ϱ.

Unter Berücksichtigung dieser Bemerkungen lässt sich die Reduction der beiden für T gefundenen Ausdrücke (6.) und (6′.) auf ihren reellen Theil ohne Schwierigkeit vollziehen. Aus dem ersten erhält man, wenn man das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0 und γ, γ und ∞ theilt, für ein

zwischen 2 und 6 enthaltenes p:

$$(17.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)} \left\{ \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\gamma} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(k-S)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_1} - \int_{\varrho_1}^{\gamma} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(h-S)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_1} \right\} \\ \quad + \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \displaystyle\int_{\gamma}^{\infty} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}}{\Delta_0} \left\{ \varepsilon[\pm(S-h)]^{2-\frac{1}{2}p} - \varepsilon'[\pm(S-k)]^{2-\frac{1}{2}p} \right\}. \end{cases}$$

Hierin ist:

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha}\right)\left(1+\frac{s}{\beta}\right)\left(1-\frac{s}{\gamma}\right)}, \qquad \Delta_0 = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha}\right)\left(1+\frac{s}{\beta}\right)\left(\frac{s}{\gamma}-1\right)};$$

in dem zweiten Bestandtheile sind die Zeichen + und − so zu wählen, dass $\pm(S-h)$ und $\pm(S-k)$ positive Werthe erhalten, und die Coefficienten ε und ε' haben die Werthe -1 oder $\cos\frac{1}{2}\pi(p-2)$, je nach dem das Zeichen + oder − gilt. Hiernach ist bei den zweifach-hyperboloidischen Schalen durchweg $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, während bei den einfach-hyperboloidischen resp. mit $s = \varrho_0$ und $s = \sigma_0$ für ε und ε' der Werth $\cos\frac{1}{2}\pi(p-2)$ eintritt.

Für die Attractionscomponente A ergiebt sich, wenn $p < 4$ ist, aus (17.) der Ausdruck:

$$(18.)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)} \left\{ \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\gamma} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S}{\partial a}}{\Delta_1(k-S)^{\frac{1}{2}p-1}} - \int_{\varrho_1}^{\gamma} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S}{\partial a}}{\Delta_1(h-S)^{\frac{1}{2}p-1}} \right\} \\ \quad - \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \displaystyle\int_{\gamma}^{\infty} ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S}{\partial a} \left\{ \frac{\delta[\pm(S-h)]^{1-\frac{1}{2}p} - \delta'[\pm(S-k)]^{1-\frac{1}{2}p}}{\left(1-\frac{p}{2}\right)\Delta_0} \right\}. \end{cases}$$

Darin sind δ und $\delta' = 1$ zu setzen, wenn das Zeichen +, und $= \cos\frac{1}{2}\pi(p-2)$, wenn das Zeichen − gilt. Die Ausdrücke für B und C gehen aus dem der Componente A hervor durch Verwandlung von $\frac{\partial S}{\partial a}$ in $\frac{\partial S}{\partial b}$ und $\frac{\partial S}{\partial c}$, und die Werthe dieser drei partiellen Differentialquotienten sind:

$$\frac{2(a+\lambda\alpha)}{s+\alpha}, \qquad \frac{2b}{s+\beta}, \qquad \frac{2c}{s-\gamma}.$$

Der zweite Ausdruck des T liefert für die von zwei *einfachen Hyperboloiden* begrenzten Schalen die Formel:

$$(17'.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\left\{\displaystyle\int_{-\varrho_2}^{\beta} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(S'-h)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_2} - \int_{-\sigma_2}^{\beta} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(S'-k)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_2}\right\} \\ \quad + \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}}{\Delta_3}\left\{\varepsilon\left[\mp(S'-h)\right]^{2-\frac{1}{2}p} - \varepsilon'\left[\mp(S'-k)\right]^{2-\frac{1}{2}p}\right\}. \end{cases}$$

Hierin ist:

$$\Delta_2 = \sqrt{\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)}, \qquad \Delta_3 = \sqrt{\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\left(\frac{s}{\beta}-1\right)\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)},$$

$$S' = -\frac{\omega}{s} + \frac{a^2+2\lambda\alpha a+\lambda^2\alpha s}{\alpha-s} + \frac{b^2}{\beta-s} - \frac{c^2}{\gamma+s},$$

und in dem letzten Integrale ist für ε, resp. ε', 1 oder $\cos\frac{1}{2}\pi p$ zu setzen, je nachdem $S'-h$, resp. $S'-k$, negativ oder positiv ist, so dass die Function unter dem Integralzeichen in den drei Intervallen β bis $-\varrho_3$, $-\varrho_3$ bis $-\sigma_3$, $-\sigma_3$ bis α nicht einerlei Form hat. — Sind die Grenzflächen *zweifache Hyperboloide*, so kommt wegen des abweichenden Verhaltens der Functionen $S'-h$ und $S'-k$ in dem Intervalle von $s=\alpha$ bis $s=\infty$ zu dem Ausdruck des T noch als dritter reeller Bestandtheil hinzu:

$$-\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)}\left\{\int_{-\varrho_0}^{\infty} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(S'-h)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_0} - \int_{-\sigma_0}^{\infty} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}(S'-k)^{2-\frac{1}{2}p}}{\Delta_0'}\right\},$$

worin:

$$\Delta_0 = \sqrt{\left(\frac{s}{\alpha}-1\right)\left(\frac{s}{\beta}-1\right)\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)};$$

und es müsste wiederum das letzte Glied dieses dritten Theiles fortfallen, wenn das äussere Hyperboloid ein einfaches, das innere ein zweifaches wäre.

Für die Attractionscomponente A der einfach-hyperboloidischen Schalen ergiebt sich aus (17'.):

$$(18'.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\left\{\displaystyle\int_{-\varrho_2}^{\beta} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S'}{\partial a}}{\Delta_2(S'-h)^{\frac{1}{2}p-1}} - \int_{-\sigma_2}^{\beta} \frac{ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S'}{\partial a}}{\Delta_2(S'-k)^{\frac{1}{2}p-1}}\right\} \\ \quad - \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\displaystyle\int_{\beta}^{a} ds.s^{1-\frac{1}{2}p}\frac{\partial S'}{\partial a}\left\{\frac{\delta\left[\mp(S'-h)\right]^{1-\frac{1}{2}p} - \delta'\left[\mp(S'-k)\right]^{1-\frac{1}{2}p}}{\left(1-\frac{p}{2}\right)\Delta_3}\right\}. \end{cases}$$

worin δ, resp. δ', 1 oder $-\cos\frac{1}{2}\pi p$ bedeutet, je nachdem $S'-h$, resp. $S'-k$, negativ oder positiv ist. — Die bei den anderen Arten von Schalen hinzukommenden Glieder sind leicht zu ergänzen.

Für $p=2$ wird in den Ausdrücken des T der Factor $\Gamma\left(\frac{p}{2}-2\right)$ unendlich, während das damit multiplicirte Integral einen endlichen Werth hat. Daraus folgt, dass beim *Newton*schen Anziehungsgesetze das Potential der hyperboloidischen Schalen unendlich gross ist. — Die Formeln für die Attractionscomponenten gelten ihrer Herleitung gemäss nur, wenn p zwischen 2 und 4 liegt. Hätte man aber A direct derselben Behandlung unterworfen, wie T, so würde man genau dieselben Ausdrücke auch für ein zwischen 0 und 2 gelegenes p erhalten haben. Allein dieses Resultat muss wenigstens theilweise als unrichtig bezeichnet werden, wie das folgende Beispiel erläutern wird. Betrachten wir bei einer zweifach-hyperboloidischen Schale nur den einen ihrer beiden gesonderten Theile; die Potentialfunction und die Resultante der Anziehung werden, wenn (a, b, c) im Mittelpunkt liegt und $\omega=0$ ist, dargestellt durch die beiden dreifachen Integrale:

$$\frac{1}{p-1}\int\frac{dm}{r^{p-1}} \quad \text{und} \quad \int\frac{\cos\vartheta\,.\,dm}{r^{p}},$$

wo ϑ den Winkel bezeichnet, den eine vom Mittelpunkt nach einem Punkt der Masse gezogene Gerade mit der Z-Axe bildet. Da nun $\cos\vartheta$ immer endlich und von einerlei Vorzeichen ist, und das erste Integral unendlich ist für $p\leqq 2$, so muss das zweite Integral und folglich die Anziehung unendlich gross sein für $p\leqq 1$. Daher muss die Gesammtanziehung beider Theile der Schale als unbestimmt gelten. Die Formeln (18.) und (18.′) können folglich nur für $p>1$ und <4 Gültigkeit haben, wiewohl im Verlauf der Rechnung sich nur die Beschränkung $p>0$ und <4 ergeben würde. Dieser scheinbare Widerspruch erledigt sich durch die Bemerkung, dass bei einem vielfachen Integrale die Reihenfolge der Integration nicht gleichgültig ist, wenn die Grenzen unendlich gross und die Elemente desselben theils positiv theils negativ sind.

Es sollen jetzt die allgemeinen Formeln auf den Fall angewendet werden, wo die Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetze erfolgt.

§. 6.

Der *Maclaurin*sche Satz.

Ertheilt man p einen unendlich wenig von 2 verschiedenen Werth, so sind die numerischen Coefficienten δ und δ' in (18.) entweder genau gleich 1

oder nur um Grössen von der Ordnung $(1-\frac{1}{2}p)^2$ von 1 verschieden. Daher wird für $p=2$:

$$\frac{\delta[\pm(S-h)]^{1-\frac{1}{2}p}-\delta'[\pm(S-k)]^{1-\frac{1}{2}p}}{1-\frac{1}{2}p}=\log\left(\frac{\pm(S-h)}{\pm(S-k)}\right),$$

und hierfür kann man, welche von den Zeichen + und − auch gelten mögen, stets schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{S-h}{S-k}\right)^2.$$

Also ergiebt sich aus (18.):

$$(19.)\qquad A=-\pi\int_{\sigma_1}^{\varrho_1}\frac{\partial S}{\partial a}\frac{ds}{\Delta_1}-\tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{\Delta_0}\frac{\partial S}{\partial a}\log\left(\frac{S-h}{S-k}\right)^2.$$

Ebenso liefert die Gleichung (18′.) für die einfach-hyperboloidischen Schalen:

$$(19'.)\qquad A=\pi\int_{-\varrho_2}^{-\sigma_2}\frac{\partial S'}{\partial a}\frac{ds}{\Delta_2}-\tfrac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{\Delta_3}\frac{\partial S'}{\partial a}\log\left(\frac{S'-h}{S'-k}\right)^2,$$

während für die zweifach-hyperboloidischen und die von ungleichartigen Hyperboloiden begrenzten Schalen noch resp. die Integrale

$$-\pi\int_{-\varrho_0}^{-\sigma_0}\frac{\partial S'}{\partial a}\frac{ds}{\Delta_0'}\quad\text{und}\quad-\pi\int_{-\varrho_0}^{\infty}\frac{\partial S'}{\partial a}\frac{ds}{\Delta_0'}$$

als dritte Glieder hinzutreten. — Wenn man noch $\omega=0$ nimmt, so beziehen sich die gewonnenen Formeln auf den Fall des *Newton*schen Gesetzes; allein die Grössen ϱ_1, σ_1, ϱ_2, σ_2 bedeuten dann nicht durchweg Wurzeln der Gleichungen: $S=h$ und $S=k$, welche auf den dritten Grad herabsinken, sondern nach dem, was früher gesagt worden, hat man zu setzen:

$\sigma_1=0$, $\varrho_1=0$ für einen inneren Punkt,
$\sigma_2=0$, $\varrho_2=0$ für einen äusseren Punkt,
$\sigma_1=0$, $\varrho_2=0$ für einen Punkt der Masse.

Es verschwindet hiernach für einen inneren Punkt das erste Integral in (19.), und für einen äusseren das in (19′.).

Wiewohl die Formeln (19.) und (19′.) wegen ihres zweiten Bestandtheiles durchaus nicht den einfachen Character haben, wie diejenigen, welche für ellipsoidische Schalen gelten, so lassen sie doch dieses bemerkenswerthe Resultat auf der Stelle erkennen, dass der berühmte *Maclaurin*sche Satz auch für alle nicht ellipsoidischen Schalen Geltung hat. Betrachten wir z. B. eine von wirklichen Hyperboloiden begrenzte Schale und setzen der Einfachheit

wegen $\lambda = 0$, so dass für alle der Masse angehörigen Punkte die Ungleichheit:

$$h < \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - \frac{z^2}{\gamma} < k$$

erfüllt ist. Dann folgt aus (19.) für einen inneren Punkt:

$$A = -\sqrt{\alpha\beta\gamma}\int_{\gamma}^{\infty} \frac{a\{\log(S-h)^2 - \log(S-k)^2\}\,ds}{(s+\alpha)\sqrt{(s+\alpha)(s+\beta)(s-\gamma)}},$$

während

$$S = \frac{a^2}{\alpha+s} + \frac{b^2}{\beta+s} - \frac{c^2}{\gamma-s}.$$

Die Ungleichheit

$$h < \frac{x^2}{\alpha+\eta} + \frac{y^2}{\beta+\eta} - \frac{z^2}{\gamma-\eta} < k,$$

worin η zwischen $-\beta$ und γ enthalten sein muss, bestimmt eine zweite Schale, deren unter sich ähnliche Grenzflächen mit denen der ersten bezüglich homofocal sind. Die Attractionscomponente A' derselben ergiebt sich, wenn der Punkt (a, b, c) auch in Bezug auf sie ein innerer ist, aus dem Ausdruck für A durch blosse Verwandlung von α, β, γ in $\alpha+\eta$, $\beta+\eta$, $\gamma-\eta$. Dadurch ändert aber das Integral seinen Werth nicht, wie man sogleich sieht, wenn man $s-\eta$ statt des Integrationsbuchstabens s schreibt. Ebenso verhält es sich mit den beiden anderen Componenten; daher hat man:

$$(20.) \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{(\alpha+\eta)(\beta+\eta)(\gamma-\eta)}}.$$

Dieselbe Relation gilt, wie leicht zu sehen, auch dann, wenn (a, b, c) in Bezug auf beide Schalen ein äusserer Punkt ist. Also hat man den Satz:

Zwei homofocale hyperboloidische Schalen üben auf ein und denselben Punkt, der nicht zwischen ihren Grenzflächen liegt, Wirkungen von gleicher Richtung aus, welche sich wie die Producte der Hauptaxen zweier einander entsprechenden Grenzflächen verhalten.

Zwei homofocale hyperbolisch-paraboloidische Schalen werden bestimmt durch die Ungleichheiten:

$$h < \frac{y^2}{\beta} - \frac{z^2}{\gamma} + 2\lambda x < k,$$

$$h + \lambda^2\eta < \frac{y^2}{\beta+\eta} - \frac{z^2}{\gamma-\eta} + 2\lambda x < k + \lambda^2\eta.$$

Man erkennt ohne Mühe, dass auch die Anziehungen zweier solchen Schalen

gleichgerichtet sind, und dass die gleichnamigen Componenten sich verhalten wie

$$\sqrt{\beta\gamma} : \sqrt{(\beta+\eta)(\gamma-\eta)}.$$

Da man $\lambda = 0$ nehmen darf, so gilt dieselbe Eigenschaft auch für homofocale hyperbolisch-cylindrische Schalen.

§. 7

Die unendlich dünnen Schalen.

Setzt man $k = h+\delta h$ und versteht unter δh eine unendlich kleine positive Grösse, so geben die Formeln (19.) und (19'.) die eine Componente der Anziehung für eine unendlich dünne Schale, aber im Allgemeinen in einer sehr ungeschickten Form. Es ist nämlich nur dann erlaubt statt der Ausdrücke

$$\log\left(\frac{S-h}{S-k}\right)^2 \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{S'-h}{S'-k}\right)^2$$

die einfacheren

$$\frac{2\delta h}{S-h} \quad \text{und} \quad \frac{2\delta h}{S'-h}$$

zu substituiren, wenn $S-h$, resp. $S'-h$, für keinen Werth des s innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet, und im entgegengesetzten Falle würden die Integrale nach obiger Substitution keinen bestimmten Sinn mehr haben. Daher lässt sich in dieser Weise die zweite Formel gar nicht und die erste nur beim zweifachen Hyperboloide anwenden. Dieser Uebelstand kann durch Betrachtung derjenigen Function V beseitigt werden, aus welcher die Attractionscomponenten durch partielle Differentiation nach a, b, c hervorgehen, bei welcher Betrachtung ich mich der Kürze halber auf den Fall eines einfachen Hyperboloides und eines äusseren Punktes beschränke. Der Ausdruck des V, welcher (19.) entspricht, ist für Schalen von endlicher Dicke:

$$(21.) \quad V = \pi\int_{\sigma_1}^{\gamma}\frac{(k-S)\,ds}{\Delta_1} - \pi\int_{\varrho_1}^{\gamma}\frac{(h-S)\,ds}{\Delta_1}$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{\Delta_0}\{(S-h)\log(S-h)^2-(S-k)\log(S-k)^2-2(k-h)\},$$

wobei es erlaubt ist, zu der rechten Seite eine beliebige von a, b, c unabhängige Grösse hinzuzufügen. Für $k = h+\delta h$ möge V durch $U\delta h$ bezeichnet werden; dann erhält man, wenn man die beiden Seiten von (21.)

resp. durch δh und $k-h$ dividirt und den Werth der zweiten für $k=h$ auf die gewöhnliche Weise bestimmt:

$$(22.) \qquad U = \pi\int_{\varrho_1}^{\gamma}\frac{ds}{\Delta_1} - \tfrac{1}{2}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{\Delta_0}\log(S-h)^2.$$

Indem man von der Gleichung (19'.) ausgeht, findet man für U einen zweiten Ausdruck, nämlich:

$$(22'.) \qquad U = -\tfrac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{\Delta_3}\log(S'-h)^2.$$

Vermöge der Wurzeln ϱ_3, ϱ_1, ϱ_0 der Gleichung:

$$(23.) \qquad \frac{a^2}{\varrho+\alpha}+\frac{b^2}{\varrho+\beta}+\frac{c^2}{\varrho-\gamma} = h,$$

welche resp. in den Intervallen: $-\alpha$ bis $-\beta$, 0 bis γ, γ bis ∞ liegen, lassen sich $S-h$ und $S'-h$ in der Form darstellen:

$$S-h = h\frac{(s-\varrho_3)(s-\varrho_1)(\varrho_0-s)}{(s+\alpha)(s+\beta)(s-\gamma)},$$

$$S'-h = h\frac{(\varrho_3+s)(s+\varrho_1)(s+\varrho_0)}{(\alpha-s)(s-\beta)(\gamma+s)},$$

und wenn man diese Werthe in (22.) und (22'.) einsetzt, so erhält man bis auf Glieder, die in Bezug auf a, b, c constant sind:

$$(24.) \qquad U = \pi\int_{\varrho_1}^{\gamma}\frac{ds}{\Delta_1} - \int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{\Delta_0}\left\{\log\left(\frac{s-\varrho_3}{s}\right)+\log\left(\frac{s-\varrho_1}{s}\right)+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\varrho_0-s}{s}\right)^2\right\},$$

$$(24'.) \qquad U = -\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{\Delta_3}\left\{\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\varrho_3+s}{s}\right)^2+\log\left(\frac{s+\varrho_1}{s}\right)+\log\left(\frac{s+\varrho_0}{s}\right)\right\}.$$

Es ist jetzt erlaubt, den ersten Ausdruck des U nach ϱ_1 und ϱ_3, den zweiten nach ϱ_1 und ϱ_0 nach den gewöhnlichen Regeln zu differentiiren. Dadurch findet man:

$$(25.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\varrho_1} = -\dfrac{\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{(\alpha+\varrho_1)(\beta+\varrho_1)(\gamma-\varrho_1)}}+\displaystyle\int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{(s-\varrho_1)\Delta_0} = -\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{(s+\varrho_1)\Delta_3}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varrho_3} = \displaystyle\int_{\gamma}^{\infty}\frac{ds}{(s-\varrho_3)\Delta_0}, \qquad \dfrac{\partial U}{\partial\varrho_0} = -\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{(s+\varrho_0)\Delta_3}. \end{cases}$$

Die partiellen Derivirten des U nach ϱ_1, ϱ_3, ϱ_0 werden somit durch *vollständige elliptische Integrale der dritten Gattung* ausgedrückt. Dieselben sind bezüglich constant für Punkte auf ein und demselben mit dem gegebenen Hyperboloide homofocalen einfachen Hyperboloide, zweifachen Hyperboloide

oder Ellipsoide, deren Gleichungen durch (23.) vorgestellt werden, wenn man darin unter a, b, c die laufenden Coordinaten versteht und für ϱ bezüglich die Werthe ϱ_1, ϱ_3, ϱ_0 nimmt. — Man hat jetzt für die der X-Axe parallele Componente δA, oder $\delta h\frac{\partial U}{\partial a}$, die Formel:

$$\delta A = \delta h\Big(\frac{\partial U}{\partial \varrho_1}\,\frac{\partial \varrho_1}{\partial a}+\frac{\partial U}{\partial \varrho_3}\,\frac{\partial \varrho_3}{\partial a}+\frac{\partial U}{\partial \varrho_0}\,\frac{\partial \varrho_0}{\partial a}\Big),$$

oder vielmehr:

$$(26.)\qquad \delta A = 2\delta h\Big(P_1\frac{\partial U}{\partial \varrho_1}\,\frac{P_1 a}{\varrho_1+\alpha}+P_3\frac{\partial U}{\partial \varrho_3}\,\frac{P_3 a}{\varrho_3+\alpha}+P_0\frac{\partial U}{\partial \varrho_0}\,\frac{P_0 a}{\varrho_0+\alpha}\Big),$$

worin:

$$P_1 = \Big\{\frac{a^2}{(\varrho_1+\alpha)^2}+\frac{b^2}{(\varrho_1+\beta)^2}+\frac{c^2}{(\varrho_1-\gamma)^2}\Big\}^{-\frac{1}{2}}$$

u. s. w.

Die Ausdrücke für δB und δC ergeben sich hieraus durch Vertauschung von a, α mit b, β und c, $-\gamma$. Aus der Form dieser drei Ausdrücke sieht man sogleich, dass die Grössen

$$2\delta h P_1\frac{\partial U}{\partial \varrho_1},\quad 2\delta h P_3\frac{\partial U}{\partial \varrho_3},\quad 2\delta h P_0\frac{\partial U}{\partial \varrho_0}$$

die Componenten der Anziehung darstellen, zerlegt nach den Normalen der drei erwähnten homofocalen Flächen im Punkte (a, b, c). Man hat also den folgenden Satz:

Bewegt sich der angezogene Punkt auf einer mit dem gegebenen Hyperboloide homofocalen Fläche zweiten Grades, so ist die auf dieser Fläche normale Attractionscomponente proportional dem Abstande der jedesmaligen Tangentialebene vom Mittelpunkt.

§. 8.

Die Rotationshyperboloide und das hyperbolische Paraboloid.

Die Formel (22′.) des vorigen Paragraphen kann man, indem man α unendlich wenig verschieden von β annimmt, mit Vortheil auf den Fall einer von *einfachen Rotationshyperboloiden* begrenzten Schale und eines *äusseren Punktes* anwenden. Man darf darin unbeschadet der Allgemeinheit $b=0$ setzen und kann

$$\log(S'-h)^2(\alpha-s)^2 \quad \text{statt} \quad \log(S'-h)^2$$

schreiben, weil dadurch zu U nur ein von a und c unabhängiges Glied hin-

zutritt. Weil nun das Argument des neuen Logarithmus innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wenig von a^4 verschieden ist, so hat man:

$$U = -\frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+\gamma}}\log(a^2)\int_{\beta}^{\alpha}\frac{ds}{\sqrt{(\alpha-s)(s-\beta)}} = -\frac{\pi\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+\gamma}}\log(a^2),$$

woraus für die Kräftefunction V einer Schale von endlicher Dicke folgt:

$$V = \int_h^k U dh = -\frac{\pi(k-h)\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+\gamma}}\log(a^2).$$

Demnach ist:

$$(27.) \qquad A = -\frac{2\pi(k-h)\alpha\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+\gamma}}\frac{1}{a}, \quad C = 0;$$

d. h. die Resultante der Anziehung ist umgekehrt proportional der Entfernung des angezogenen Punktes von der Rotationsaxe und durchschneidet die letztere rechtwinklig *).

Wenn der Punkt ein innerer oder die Schale von zweifachen Rotationshyperboloiden begrenzt ist, so lassen sich die Attractionscomponenten zwar noch vermittelst Logarithmen und algebraischer Grössen angeben, zeigen aber nicht so einfache Eigenschaften.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass auch die Componenten der Anziehung einer von congruenten hyperbolischen Paraboloiden begrenzten Schale durch Elementarfunctionen ausdrückbar sind. Diese Ausdrücke sind wesentlich verschieden von denen, welche für elliptisch-paraboloidische Schalen gelten, und der Ausdruck für die Componente A ist dadurch bemerkenswerth, dass er Quadrate von Logarithmen und Kreisbogen enthält, während dieselben in denen der beiden anderen Componenten nur linear vorkommen.

Fraustadt, im November 1860.

---

*) Hierin ist ein in einem früheren Aufsatze (dieses Journal Bd. 58, S. 248) aufgestellter Satz über die Anziehung einer mit Masse belegten Kegelfläche auf einen äusseren Punkt als specieller Fall enthalten. — Die am Schlusse jenes Aufsatzes gegebene geometrische Construction der Resultante für einen inneren Punkt ist insofern zu berichtigen, als an Stelle des Rhombus ein Viereck construirt werden muss, welches durch die von dem angezogenen Punkte ausgehende Diagonale in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt wird.

Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Wenn man eine Function dreier rechtwinkligen Coordinaten nach Kugelfunctionen entwickelt, so gelangt man zu einer Reihe, deren Glieder die bekannten Functionen zweier Winkel sind, während in ihren Coefficienten nur der Radius Vector noch auftritt. Jene Functionen zweier Winkel haben aber die Eigenschaft, dass sie, mit einer passenden Potenz des Radius multiplicirt, in ganze homogene Functionen der Coordinaten übergehen; man kann daher die Entwicklung nach homogenen Functionen der Coordinaten ausführen, deren Coefficienten dann nur noch Functionen des Radius Vector sind. Diese homogenen Functionen, welche in einigen Aufgaben der mathematischen Physik ihrer Symmetrie wegen mit Vortheil angewandt werden können, sind dann dadurch definirt, dass sie neben der Bedingung der Homogeneität der Gleichung

$$(1.) \qquad \Delta^2 \Omega = 0$$

(nach *Lamés* Bezeichnung) genügen. Eine grosse Zahl von Eigenschaften dieser Functionen erhält man direct aus den bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen; eine etwas ferner liegende Eigenschaft bildet den Gegenstand dieses Aufsatzes.

Zuvörderst kann man leicht die allgemeinste Gestalt der Function n^{ter} Ordnung angeben, welche der Gleichung (1.) genügt. Es sei zu diesem Zweck

$$(2.) \qquad \Omega = V + r^2 V_1 + r^4 V_2 \ldots,$$

wo r den Radius Vector bedeutet, und wo V, V_1, V_2 ... homogene Functionen respective der n^{ten}, $n-2^{\text{ten}}$, $n-4^{\text{ten}}$ ... Ordnung bedeuten. Die Form (2.) kann offenbar auf unendlich viele Arten gewählt werden; da V noch beliebig gelassen ist, kann man über V_1, V_2 ... jedenfalls nach Willkür verfügen. Inzwischen ist

$$\begin{aligned}\Delta^2 (r^{2k} V_k) &= r^{2k} \Delta^2 V_k + 4k\Big(x\frac{\partial V_k}{\partial x} + y\frac{\partial V_k}{\partial y} + z\frac{\partial V_k}{\partial z}\Big) r^{2k-2} + 2k(2k+1) r^{2k-2} V_k \\ &= r^{2k} \Delta^2 V_k + 2k(2n-2k+1) V_k r^{2k-2}.\end{aligned}$$

Die Gleichung (1.) geht daher durch Substitution von (2.) über in:

$$\begin{aligned}0 = {} & \Delta^2 V + r^2 \Delta^2 V_1 + r^4 \Delta^2 V_2 \ldots \\ & + 2(2n-1) V_1 + 4(2n-3) r^2 V_2 + 6(2n-5) r^4 V_3 : \ldots\end{aligned}$$

In dieser Gleichung kann man nun das letzte V so bestimmen, dass der Coefficient der höchsten Potenz von r verschwindet; sodann das vorletzte V so, dass auch die zweithöchste Potenz von r verschwindet, u. s. w. Dann bleibt schliesslich eine Gleichung, welche V_1 durch V ausdrückt; und indem dies letztere völlig unbestimmt bleibt, hat man die Beziehungen:

$$V_1 = -\frac{\Delta^2 V}{2.2n-1},$$
$$V_2 = -\frac{\Delta^2 V_1}{4.2n-3},$$
$$V_3 = -\frac{\Delta^2 V_2}{6.2n-5},$$
$$\cdots\cdots$$

oder, wenn man durch Δ^4, Δ^6 ... die doppelte, dreifache etc. Wiederholung der Operation Δ^2 andeutet:

$$V_1 = -\frac{\Delta^2 V}{2.2n-1},$$
$$V_2 = +\frac{\Delta^4 V}{2.4.2n-1.2n-3},$$
$$V_3 = -\frac{\Delta^6 V}{2.4.6.2n-1.2n-3.2n-5},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man hat also sofort den Satz:

Die allgemeinste ganze Function n^{ter} Ordnung, welche der Gleichung $\Delta^2\Omega = 0$ genügt, ist

$$(3.)\qquad \Omega = V - \frac{r^2.\Delta^2 V}{2.2n-1} + \frac{r^4.\Delta^4 V}{2.4.2n-1.2n-3} - + \cdots,$$

wo V eine ganz beliebige homogene Function n^{ter} Ordnung bedeutet *).

Setzt man hier z. B. $V = x^n$, so erhält man die der Kugelfunction P_n entsprechende homogene Function; setzt man $V = (xx_0 + yy_0 + zz_0)^n$, so ergeben

---

*) Man kann den obigen Satz noch dahin ohne Mühe erweitern, dass die allgemeinste Function n^{ter} Ordnung, welche der Gleichung

$$\Delta^2\Omega = \vartheta$$

genügt, (wo ϑ eine ganze homogene Function $(n-2)^{ter}$ Ordnung bedeutet) folgende Gestalt annimmt:

$$\Omega = \frac{r^2\vartheta}{2.2n-1} - \frac{r^4\Delta^2\vartheta}{2.4.2n-1.2n-3} + \frac{r^6\Delta^4\vartheta}{2.4.6.2n-1.2n-3.2n-5} - + \cdots$$
$$+ V - \frac{r^2\Delta^2 V}{2.2n-1} + \frac{r^4\Delta^4 V}{2.4.2n-1.2n-3} - + \cdots.$$

sich diejenigen Ausdrücke, welche bei der Entwickelung der Quadratwurzel der reciproken Entfernung zweier Punkte auftreten. Setzt man aber in (3.) $V = r^2 . W$, wo W von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so entsteht immer identisch Null. Denn man erhält offenbar immer

$$\Delta^{2k}(r^2 W) = r^2 \Delta^{2k} W + \alpha_k \Delta^{2k-2} W,$$

und indem man auf diese Gleichung die Operation Δ^2 anwendet:

$$\Delta^{2k+2}(r^2 W) = r^2 \Delta^{2k+2} W + (\alpha_k + 4n - 8k - 2) \Delta^{2k} W.$$

Es ist daher

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + 4n - 8k - 2;$$

und wenn man bemerkt, dass $\alpha_0 = 0$, so ergiebt sich sofort:

$$\alpha_{k+1} = 2(k+1)(2n-2k-1), \qquad \alpha_k = 2k(2n-2k+1).$$

Man hat sonach

$$\Delta^{2k}(r^2 W) = r^2 \Delta^{2k} W + 2k(2n-2k+1) \Delta^{2k-2} W;$$

und wenn man also $V = r^2 W$ setzt:

$$\Omega = r^2 W - \frac{r^4 \Delta^2 W + 2(2n-1) r^2 W}{2 . 2n-1} + \frac{r^6 \Delta^4 W + 4(2n-3) r^4 \Delta^2 W}{2 . 4 . 2n-1 . 2n-3} - + \cdots$$

was offenbar identisch verschwindet.

Hierdurch erklärt es sich, dass die in der allgemeinen Form von V enthaltenen $\frac{n+1 . n+2}{1 . 2}$ Constanten nur die Stelle von $2n+1$ Constanten vertreten, wie dies die bekannte Thatsache fordert, dass die allgemeinste Kugelfunction n^{ter} Ordnung nur die letztere Zahl willkürlicher Constanten enthält. Denn dem Obigen zufolge kann man in (3.) ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen $V - r^2 W$ an die Stelle von V treten lassen, und man kann dann die $\frac{n . n+1}{1 . 2}$ Coefficienten von W so bestimmen, dass ebensoviel Coefficienten in V bestimmte Werthe annehmen.

Ich werde nun zeigen, dass man immer für V das Product von n linearen Factoren setzen darf, und werde zugleich zeigen, wie man dieselben findet, indem man W so bestimmt, dass $V - r^2 W$ in lineare Factoren sich auflöst.

Denken wir uns unter x, y, z die homogenen Coordinaten eines Punktes in der Ebene. Dann ist

$$V = 0$$

die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung; und dieselbe wird von dem Kegelschnitt

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

in $2n$ Punkten geschnitten. Verbindet man diese Punkte paarweise durch n gerade Linien, so dass durch jeden Punkt dabei eine Linie geht (was auf $1.3.5\ldots 2n-1$ Arten geschehen kann) und sind

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots \quad \alpha_n = 0$$

die Gleichungen solcher n Geraden; so kann man bekanntlich, da weder $V=0$ noch diese Geraden von $r=0$ in anderweitigen Punkten geschnitten werden, die absoluten Werthe der Coefficienten in den α so bestimmen, dass identisch

$$V = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + r^2 W,$$

wo W eine homogene Function $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet.

Hierdurch ist die oben aufgestellte Frage erledigt, und es fragt sich nur, wie man für eine gegebene Function Ω dieses Product von Geraden oder die erwähnten $2n$ Schnittpunkte bestimmen könne, selbst wenn Ω nicht in der Form (3.) gegeben vorliegt. Nun bemerkt man aus (3.), dass die Schnittpunkte der Curven

$$V = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 0$$

mit den Schnittpunkten von

$$(4.) \qquad \Omega = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 0$$

zusammenfallen. Man hat also nur die letzteren aufzusuchen; eine Aufgabe, welche durch die eigenthümliche Natur der Function Ω wesentlich erleichtert wird.

Die Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades, auf welche die vorliegende Aufgabe führt, kann man in der Weise aufstellen, dass man das Product aller Gleichungen der $2n$ Schnittpunkte aufsucht. Dieser Ausdruck muss dann, was mit Hülfe einer Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades sofort geschehen kann, in seine $2n$ Factoren aufgelöst werden, und es ist leicht dann die Gleichungen $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \ldots \alpha_n=0$ zu bilden. Um aber jenes Product zu finden, verbindet man die Gleichungen (4.) mit der Gleichung

$$(5.) \qquad ux+vy+wz = 0$$

eines Schnittpunktes, und eliminirt x, y, z. Eine solche Elimination, bei welcher eine Gleichung vom 1ten, die zweite vom 2ten, die dritte vom n^{ten} Grade ist, habe ich im 58ten Bd. d. J. p. 273 allgemein ausgeführt; und zwar wird das Resultat nach den dort gegebenen Regeln:

$$(6.) \qquad R = 0 = \tfrac{1}{2}\left[\left\{C+\sqrt{C^2-AB}\right\}^n + \left\{C-\sqrt{C^2-AB}\right\}^n\right],$$

wo, nach den hier eintretenden Werthen der Coefficienten der Gleichung zweiten Grades:

$$(7.)\quad A=\begin{vmatrix}1&0&0&u&a\\0&1&0&v&b\\0&0&1&w&c\\u&v&w&0&0\\a&b&c&0&0\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}1&0&0&u&a'\\0&1&0&v&b'\\0&0&1&w&c'\\u&v&w&0&0\\a'&b'&c'&0&0\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}1&0&0&u&a'\\0&1&0&v&b'\\0&0&1&w&c'\\u&v&w&0&0\\a&b&c&0&0\end{vmatrix};$$

wo endlich a, b, c, a', b', c' symbolische Coefficienten sind, welche durch die symbolischen Gleichungen

$$(8.)\quad \Omega = (ax+by+cz)^n = (a'x+b'y+c'z)^n$$

definirt werden.

Inzwischen ist nach (7.):

$$A = (vc-wb)^2+(wa-uc)^2+(ub-va)^2, \text{ oder}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} A = (u^2+v^2+w^2)(a^2+b^2+c^2)-(ua+vb+wc)^2; \text{ und ebenso}\\ B = (u^2+v^2+w^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(ua'+vb'+wc')^2,\\ C = (u^2+v^2+w^2)(aa'+bb'+cc')-(ua+vb+wc)(ua'+vb'+wc'). \end{cases}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich wesentlich durch die Bemerkung, dass nach (8.) die symbolische Gleichung

$$0 = \Delta^2\Omega = (ax+by+cz)^{n-2}.n.n-1.(a^2+b^2+c^2)$$
$$= (a'x+b'x+c'z)^{n-2}.n.n-1.(a'^2+b'^2+c'^2)$$

stattfindet. Dieser zufolge darf man also wegen der besonderen Natur der Function Ω immer

$$(10.)\quad a^2+b^2+c^2 = a'^2+b'^2+c'^2 = 0$$

setzen. Daher reduciren A, B sich auf ihre letzten Glieder; und die Gleichung (6.) nimmt folgende Gestalt an:

$$(11.)\quad R = 0 = \tfrac{1}{2}(s-t+\sqrt{s^2-2t})^n+\tfrac{1}{2}(s-t-\sqrt{s^2-2t})^n,$$

wo

$$(12.)\quad s = (u^2+v^2+w^2)(aa'+bb'+cc'),\quad t = (ua+vb+wc)(ua'+vb'+wc')$$

gesetzt ist.

Führt man den Ausdruck (11.) aus, so erhält man:

$$(13.)\quad R = 0 = \alpha t^n+\alpha_1 t^{n-1}s+\alpha_2 t^{n-2}s^2+\cdots$$

wo α, α_1, ... numerische Coefficienten sind, welche durch die identische Gleichung

$$(14.)\quad \alpha\varepsilon^n+\alpha_1\varepsilon^{n-1}+\alpha_2\varepsilon^{n-2}+\cdots = \tfrac{1}{2}\{(1-\varepsilon+\sqrt{1-2\varepsilon})^n+(1-\varepsilon-\sqrt{1-2\varepsilon})^n\}$$

bestimmt sind. Man bemerkt aber sofort, dass mit Rücksicht auf die Glei-

chungen (10.), und wenn man die Operation Δ^2 jetzt mit den Veränderlichen u, v, w statt mit x, y, z ausführt:

$$\Delta^2(t^{n-k}) = 2(n-k)^2 . t^{n-k-1}(aa'+bb'+cc'),$$

daher überhaupt

$$\Delta^{2k}(t^n) = 2^k . n^2 . (n-1)^2 \ldots (n-k+1)^2 . t^{n-k} . (aa'+bb'+cc')^k,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\varrho^2 = u^2+v^2+w^2, \quad aa'+bb'+cc' = \beta$$

setzt:

$$t^{n-k} . \beta^k = \varrho^{2k} . \frac{\Delta^{2k}(t^n)}{2^k . (n.n-1 \ldots n-k+1)^2}.$$

Bezeichnet man nun durch U diejenige Function, in welche Ω übergeht, wenn man darin u, v, w für x, y, z substituirt, so hat man offenbar auch

$$t^n = U^2;$$

und somit geht die Gleichung (13.) über in die merkwürdige Form:

$$(15.) \qquad 0 = \alpha U^2 + \alpha_1 \frac{\varrho^2 \Delta^2(U^2)}{2.n^2} + \alpha_2 \frac{\varrho^4 \Delta^4(U^2)}{2^2 . (n.n-1)^2} + \cdots,$$

aus welcher die symbolischen Coefficienten sämmtlich verschwunden sind.

Sonach bleibt nur übrig, die Coefficienten α der Gleichung (14.) gemäss zu bestimmen, welche auch die Form annimmt:

$$\alpha\varepsilon^n + \alpha_1\varepsilon^{n-1} + \alpha_2\varepsilon^{n-2} + \cdots = \frac{1}{2^{n+1}} \{(1+\sqrt{1-2\varepsilon})^{2n} + (1-\sqrt{1-2\varepsilon})^{2n}\}.$$

Nun sind offenbar

$$x = 1+\sqrt{1-2\varepsilon} \quad \text{und} \quad y = 1-\sqrt{1-2\varepsilon}$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2z + 2\varepsilon = 0;$$

und es ist daher $x^{2n}+y^{2n}$ der Coefficient von u^{2n} in der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{1}{1-ux} + \frac{1}{1-uy} = \frac{2(1-u)}{1-2u+2\varepsilon u^2};$$

mit Rücksicht hierauf endlich erscheint α_k als Entwickelungscoefficient, nämlich als Coefficient von $\varepsilon^{n-k} . u^{2n}$ in der Entwickelung von

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1-u}{1-2u+2\varepsilon u^2}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck zunächst nach Potenzen von ε, so erhält

man als Coefficienten von ε^{n-k}:

$$\frac{(-1)^{n-k}}{2^n}\cdot\frac{(1-u).(2u^2)^{n-k}}{(1-2u)^{n-k+1}} = \frac{(-1)^{n-k}}{2^k}\cdot\frac{(1-u)u^{2(n-k)}}{(1-2u)^{n-k+1}};$$

und indem man dies wieder nach u entwickelt, findet sich der gesuchte Coefficient von u^{2n}:

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{2^k}\left\{\frac{n-k+1.n-k+2\ldots n+k}{1.2\ldots 2k}\cdot 2^{2k} - \frac{n-k+1.n-k+2\ldots n+k-1}{1.2\ldots 2k-1}\cdot 2^{2k-1}\right\}$$

$$= (-1)^{n-k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n-k+1.n-k+2\ldots n+k-1}{1.2\ldots 2k-1}\cdot 2^{k-1}.$$

Dieser Formel entzieht sich nur der Coefficient des ersten Gliedes; indem man $k=0$ setzt, erhält man als Coefficient von u^{2n} in der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{(1-u).(2u^2)^n}{(1-2u)^{n+1}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von u offenbar:

$$\alpha = (-1)^n.$$

Die Formel für α_k giebt noch:

$$\frac{\alpha_k}{2^k.(n.n-1\ldots n-k+1)^2} = \frac{(-1)^{n-k}}{1.2\ldots 2k}\cdot\frac{n.n+1.n+2\ldots n+k-1}{n.n-1.n-2\ldots n-k+1};$$

und so wird endlich die gesuchte Eliminationsgleichung, wenn man in (15.) diese Coefficienten einführt und den gemeinsamen Factor $(-1)^n$ übergeht:

$$(16.)\quad 0 = U^2 - \frac{\varrho^2}{1.2}\cdot\frac{n}{n}\Delta^2(U^2) + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{n.n+1}{n.n-1}\Delta^4(U^2)$$
$$- \frac{\varrho^6}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{n.n+1.n+2}{n.n-1.n-2}\Delta^6(U^2) + \ldots.$$

Mit geringer Modification der Ausdrucksweise kann man den angegebenen Weg die Function Ω darzustellen, nun folgendermassen zusammenfassen:

Ist Ω eine homogene Function n^{ter} Ordnung, welche die Gleichung $\Delta^2\Omega = 0$ befriedigt, also als das Product einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung mit der n^{ten} Potenz des Radius darstellbar ist, so ist der Ausdruck

$$\Omega^2 - \frac{n}{n}\cdot\frac{r^2\Delta^2(\Omega^2)}{1.2} + \frac{n.n+1}{n.n-1}\cdot\frac{r^4\Delta^4(\Omega^2)}{1.2.3.4} - + \cdots$$

stets in n lineare Factoren zerlegbar. Verbindet man diese paarweise, sind zwei so zusammengehörige

$$\alpha x+\beta y+\gamma z, \qquad \alpha' x+\beta' y+\gamma' z,$$

und bezeichnet man dann das Product der n Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

durch V, so ist immer

$$(17.) \qquad \Omega = C\left\{V - \frac{r^2\Delta^2 V}{2.2n-1} + \frac{r^4\Delta^4 V}{2.4.2n-1.2n-3} - + \cdots\right\},$$

wo C eine Constante bezeichnet.

Ich bemerke noch, dass dies Product V zwar auf $1.3.5\ldots 2n-1$ verschiedene Arten durch verschiedene Combination der linearen Factoren gebildet werden kann; aber nur auf eine einzige Weise, wenn diese Factoren sämmtlich reell sein sollen. Denn die linearen Factoren des Ausdrucks (16.), welche die Schnittpunkte von $V=0$ mit

$$x^2+y^2+z^2 = 0$$

darstellen, sind offenbar sämmtlich imaginär; man kann also reelle Factoren in V nur dadurch erzielen, dass man zu deren Bildung je zwei conjugirte Factoren des Ausdrucks (16.) verbindet.

Die Form von Ω, in welcher V ein Product linearer Ausdrücke ist, steht mit denjenigen Kugelfunctionen im genauesten Zusammenhange, welche aus der Entwickelung der reciproken Quadratwurzel der Entfernung zweier Punkte hervorgehen. Eine solche Function, multiplicirt mit den n^{ten} Potenzen der Radien, entsteht, wenn V die n^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks wird. Bezeichnen wir das Resultat durch V_n, so dass

$$V_n = (xx_0+yy_0+zz_0)^n - \frac{r^2r_0^2}{2.2n-1}(xx_0+yy_0+zz_0)^{n-2} + \frac{r^4r_0^4}{2.4.2n-1.2n-3}(xx_0+yy_0+zz_0)^{n-4} - + \cdots,$$

so kann man die allgemeinste Function n^{ter} Ordnung Ω in der durch (17.) dargestellten Form sich dadurch entstanden denken, dass n mal hintereinander das Differential von V_n in Bezug auf x_0, y_0, z_0 gebildet ist, und statt der Incremente beliebige Constante, und zwar jedesmal andere, substituirt wurden.

Carlsruhe, im Juni 1861.

Sur une formule relative à la théorie des nombres.

(Par M. *Emile Mathieu* à Paris.)

Désignons par ω une racine de la congruence irréductible

$$\omega^2+\omega+1 \equiv 0 \pmod 2,$$

et représentons huit nombres par

$$x_0,\quad x_1,\quad x_\omega,\quad x_{1+\omega},\quad x'_0,\quad x'_1,\quad x'_\omega,\quad x'_{1+\omega};$$

nous aurons l'égalité suivante:

$$(A.)\quad \begin{cases} (x_0^2+x_1^2+x_\omega^2+x_{1+\omega}^2)(x_0'^2+x_1'^2+x_\omega'^2+x_{1+\omega}'^2) \\ \quad = (x_0x'_0+x_1x'_1+x_\omega x'_\omega+x_{1+\omega}x'_{1+\omega})^2 \\ \quad +(x_0x'_1-x_1x'_0-x_\omega x'_{1+\omega}+x_{1+\omega}x'_\omega)^2 \\ \quad +(x_0x'_\omega-x_\omega x'_0-x_{1+\omega}x'_1+x_1x'_{1+\omega})^2 \\ \quad +(x_0x'_{1+\omega}-x_{1+\omega}x'_0-x_1x'_\omega+x_\omega x'_1)^2. \end{cases}$$

Cette formule, sauf la manière de représenter les huit nombres, qui nous est propre, est une égalité très connue due à *Euler*. La formule (*A.*) est très facile à poser; car les deux dernières lignes du second membre se déduisent de la deuxième par la substitution circulaire $(z, \omega z)$ faite sur les indices, ou ce qui revient au même par la substitution

$$(x_1x_\omega x_{1+\omega})(x'_1x'_\omega x'_{1+\omega})$$

faite sur les nombres de la formule.

Nous voyons d'après cela que nous aurons dans le second membre les quatre mêmes carrés si nous faisons sur les indices la permutation circulaire $(1, \omega, \omega^2)$ ou

$$(1, \omega, 1+\omega);$$

on vérifie ensuite que la composition du second membre n'est pas non plus altérée, si l'on fait sur les indices la permutation circulaire $(0, \omega, \omega^2)$ ou

$$(0, \omega, 1+\omega).$$

On conclut de là facilement que par la permutation des quatre indices 0, 1, ω, $1+\omega$ le second membre ne peut donner que deux décompositions différentes en quatre carrés; autrement dit, des 24 permutations de ces 4 indices, 3×4 donnent *une* décomposition en carrés, 3×4 en donnent une autre.

Permutons les 4 nombres x_0, x_1, x_ω, $x_{1+\omega}$ de toutes les manières possibles; permutons de même entr'eux les 4 nombres x'_0, x'_1, x'_ω, $x'_{1+\omega}$ et nous aurons $(1.2.3.4)^2$ permutations qui ne changent pas le premier membre. Or étant donnée une quelconque de ces permutations, il y en a 3×4 qui donnent pour le second membre la même décomposition en carrés. Donc on obtiendra de la sorte pour le second membre $\frac{(1.2.3.4)^2}{3\times 4} = 48$ décompositions différentes en quatre carrés.

Donnons maintenant à la lettre ω une autre signification, et supposons qu'elle représente une racine imaginaire de la congruence $z^8 \equiv z \pmod 2$; prenons par exemple pour ω une racine de la congruence irréductible

$$(a.) \qquad \omega^3+\omega+1 \equiv 0 \pmod 2,$$

et représentons 16 nombres par

$$\begin{array}{cccccccc} x_0, & x_1, & x_\omega, & x_{1+\omega}, & x_{\omega^2}, & x_{1+\omega^2}, & x_{\omega+\omega^2}, & x_{1+\omega+\omega^2}, \\ x'_0, & x'_1, & x'_\omega, & x'_{1+\omega}, & x'_{\omega^2}, & x'_{1+\omega^2}, & x'_{\omega+\omega^2}, & x'_{1+\omega+\omega^2}, \end{array}$$

nous aurons la formule suivante:

$$(B.) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0^2+x_1^2+x_\omega^2+x_{1+\omega}^2+x_{\omega^2}^2+x_{1+\omega^2}^2+x_{\omega+\omega^2}^2+x_{1+\omega+\omega^2}^2) \\ \times (x_0'^2+x_1'^2+x_\omega'^2+x_{1+\omega}'^2+x_{\omega^2}'^2+x_{1+\omega^2}'^2+x_{\omega+\omega^2}'^2+x_{1+\omega+\omega^2}'^2) \\ = \left(\begin{array}{l} x_0x_0'+x_1x_1'+x_\omega x_\omega'+x_{1+\omega}x_{1+\omega}' \\ +x_{\omega^2}x_{\omega^2}'+x_{1+\omega^2}x_{1+\omega^2}'+x_{\omega+\omega^2}x_{\omega+\omega^2}'+x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_1'-x_1x_0'-x_\omega x_{1+\omega}'+x_{1+\omega}x_\omega' \\ -x_{\omega^2}x_{1+\omega^2}'+x_{1+\omega^2}x_{\omega^2}'-x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}'+x_{1+\omega+\omega^2}x_{\omega+\omega^2}' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_\omega'-x_\omega x_0'-x_{\omega^2}x_{\omega+\omega^2}'+x_{\omega+\omega^2}x_{\omega^2}' \\ -x_{1+\omega}x_1'+x_1x_{1+\omega}'-x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}'+x_{1+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_{\omega^2}'-x_{\omega^2}x_0'-x_{1+\omega}x_{1+\omega+\omega^2}'+x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega}' \\ -x_{\omega+\omega^2}x_\omega'+x_\omega x_{\omega+\omega^2}'-x_{1+\omega^2}x_1'+x_1x_{1+\omega^2}' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_{1+\omega}'-x_{1+\omega}x_0'-x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}'+x_{1+\omega^2}x_{\omega+\omega^2}' \\ -x_{1+\omega+\omega^2}x_{\omega^2}'+x_{\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}'-x_1x_\omega'+x_\omega x_1' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_{\omega+\omega^2}'-x_{\omega+\omega^2}x_0'-x_{1+\omega+\omega^2}x_1'+x_1x_{1+\omega+\omega^2}' \\ -x_{1+\omega^2}x_{1+\omega}'+x_{1+\omega}x_{1+\omega^2}'-x_\omega x_{\omega^2}'+x_{\omega^2}x_\omega' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_{1+\omega+\omega^2}'-x_{1+\omega+\omega^2}x_0'-x_{1+\omega^2}x_\omega'+x_\omega x_{1+\omega^2}' \\ -x_1x_{\omega+\omega^2}'+x_{\omega+\omega^2}x_1'-x_{\omega^2}x_{1+\omega}'+x_{1+\omega}x_{\omega^2}' \end{array} \right)^2 \\ +\left(\begin{array}{l} x_0x_{1+\omega^2}'-x_{1+\omega^2}x_0'-x_1x_{\omega^2}'+x_{\omega^2}x_1' \\ -x_\omega x_{1+\omega+\omega^2}'+x_{1+\omega+\omega^2}x_\omega'-x_{1+\omega}x_{\omega+\omega^2}'+x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega}' \end{array} \right)^2. \end{array} \right.$$

Cette égalité peut être formée au moyen de la règle suivante: On déduit tous les carrés du second membre qui suivent le deuxième au moyen de celui-ci, en effectuant sur les indices la permutation circulaire $(z, \omega z)$ ou

$$(1, \omega, \omega^2, 1+\omega, \omega+\omega^2, 1+\omega+\omega^2, 1+\omega^2).$$

Quant aux signes, ils sont entièrement déterminés par la condition que les termes qui figurent dans le second membre de la formule (*A.*) se retrouvent avec les mêmes signes dans la formule (*B.*).

Cette formule est aussi très aisée à vérifier; car il suffit de constater que tous les doubles produits provenant du développement du second carré sont détruits par les doubles produits des autres carrés; puisque tous ces carrés (sauf le premier) se déduisent du second par une même permutation circulaire.

La formule (*B.*) a été trouvée par M. *Prouhet* et *Cayley* *): on voit qu'elle est très facile à obtenir au moyen de notre notation, et de la règle que nous venons de donner. Si dans cette formule, on fait

$$x_{\omega^2} = x_{1+\omega^2} = x_{\omega+\omega^2} = x_{1+\omega+\omega^2} = 0,$$

$$x'_{\omega^2} = x'_{1+\omega^2} = x'_{\omega+\omega^2} = x'_{1+\omega+\omega^2} = 0,$$

on retombe sur la formule (*A.*).

Au lieu de prendre pour ω une racine de la congruence (*a.*), on aurait pu prendre encore une racine de la congruence irréductible

$$\omega^3+\omega^2+1 \equiv 0 \pmod 2$$

dont les racines appartiennent aussi à $z^8 \equiv z \pmod 2$, et on serait arrivé à un résultat semblable.

Au lieu de prendre la somme des carrés du second membre de la formule (*B.*), considérons une fonction symétrique quelconque de ces huit carrés, que nous appellerons Φ.

Φ reste invariable si l'on fait sur les indices la permutation circulaire

$$(1, \omega, \omega^2, 1+\omega, \omega+\omega^2, 1+\omega+\omega^2, 1+\omega^2),$$

qui peut aussi s'écrire

$$(\omega^z, \omega^{z+1})$$

z étant un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Remarquons maintenant que le

---

*) La formule dont il s'agit et au moyen de laquelle le produit de deux sommes de huit carrés est représenté sous la même forme a été donnée dans le cahier de mars 1845 du Philosophical Magazine par M. *Cayley;* le géomètre irlandais M. *J. T. Graves* l'avait déjà trouvée antérieurement à la fin de 1843 et l'avait communiquée à M. *Hamilton* dans une lettre écrite au commencement de 1844. (Voy. Proceedings of the Royal Irish academy 1847, June 14.) *B.*

deuxième carré du second membre de l'égalité (*B.*) peut être ainsi écrit:

$$(x_0x_1' + x_{\omega^3}x_{\omega}' + x_{\omega^6}x_{\omega^2}' + x_{\omega^5}x_{\omega^4}' - x_1x_0' - \cdots)^2,$$

il est donc invariable par cette substitution effectuée sur les indices

$$(\omega,\ \omega^2,\ \omega^4)(\omega^3,\ \omega^6,\ \omega^5)$$

ou

$$(\omega^z,\ \omega^{2z});$$

on conclut de là que la fonction Φ est invariable par toutes les permutations renfermées dans l'expression

$$(b.) \qquad (\omega^z,\ \omega^{a^2z+b}).$$

On vérifie ensuite que la fonction Φ est invariable par la permutation circulaire

$$(c.) \qquad (0,\ \omega,\ \omega^{\frac{1}{2}},\ \omega^{\frac{1}{3}},\ \omega^{\frac{1}{4}},\ \omega^{\frac{1}{5}},\ \omega^{\frac{1}{6}})$$

ou

$$(0,\ \omega,\ \omega+\omega^2,\ 1+\omega+\omega^2,\ \omega^2,\ 1+\omega,\ 1+\omega^2);$$

les exposants $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. représentent les nombres entiers associés respectivement à 2, 3, etc., suivant le module 7.

La permutation (*c.*) peut s'écrire

$$\left(\omega^z,\ \omega^{\frac{1}{z}}\right),$$

et la fonction Φ étant invariable par cette permutation et par les permutations (*b.*), est invariable par les $3\times7\times8$ permutations

$$\left(\omega^z,\ \omega^{\frac{az+b}{cz+d}}\right)$$

pour lesquelles $ad-bc$ est résidu quadratique de 7. Ainsi nous voyons encore que ces $3\times7\times8$ permutations n'alterèrent pas la composition des carrés du second membre de la formule (*B.*).

Dans l'égalité (*B.*) permutons les nombres $x_0,\ x_1,\ x_\omega,\ \ldots,\ x_{\omega^6}$ de toutes les manières possibles, puis aussi $x_0',\ x_1',\ x_\omega',\ \ldots,\ x_{\omega^6}'$, et nous aurons $(1.2.3\ldots8)^2$ permutations qui ne changent pas le premier membre, mais qui changeront en général la composition des carrés du second membre; le nombre de ces permutations qui ne changent pas la composition des carrés du second membre étant $3.7.8$, ce deuxième membre est susceptible de prendre $\frac{(1.2.3\ldots8)^2}{3.7.8}$ formes. On en conclut que la formule (*B.*) donne par la permutation des indices $\frac{(1.2.3\ldots8)^2}{3.7.8} = 9676800$ décompositions en huit carrés.

Ce qui précède nous conduit tout naturellement à quelques remarques sur les fonctions de huit quantités; les observations que nous allons faire non seulement sont démontrées d'une manière particulière, mais comme celles qui viennent d'être faites, ne sont pas susceptibles de généralisation.

Si l'on examine avec attention la formule (*B.*), on voit facilement que les substitutions effectuées sur les indices qui laissent Φ invariable ne changent pas non plus la fonction F symétrique des fonctions suivantes:

$$(C.)\quad \begin{cases} x_0x_{1+\omega}x_{1+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2} + x_1x_\omega x_{\omega^2}x_{\omega+\omega^2}, \\ x_0x_{\omega+\omega^2}x_1x_{1+\omega^2} + x_\omega x_{\omega^2}x_{1+\omega}x_{1+\omega+\omega^2}, \\ x_0x_{1+\omega+\omega^2}x_\omega x_1 + x_{\omega^2}x_{1+\omega}x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}, \\ x_0x_{1+\omega^2}x_{\omega^2}x_\omega + x_{1+\omega}x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_1, \\ x_0x_1x_{1+\omega}x_{\omega^2} + x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}x_\omega, \\ x_0x_\omega x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega} + x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}x_1x_{\omega^2}, \\ x_0x_{\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_{\omega+\omega^2} + x_{1+\omega^2}x_1x_\omega x_{1+\omega}; \end{cases}$$

ainsi la fonction F est invariable par les substitutions

$$\left(\omega^z,\ \omega^{\frac{az+b}{cz+d}}\right)$$

pour lesquelles $ad-bc$ est résidu quadratique; mais elle est invariable par d'autres substitutions: en effet la fonction F' symétrique des fonctions

$$(D.)\quad \begin{cases} x_0x_\omega x_{\omega^2}x_{\omega+\omega^2} + x_1x_{1+\omega}x_{1+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}, \\ x_0x_{\omega^2}x_{1+\omega}x_{1+\omega+\omega^2} + x_\omega x_{\omega+\omega^2}x_1x_{1+\omega^2}, \\ x_0x_{1+\omega}x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2} + x_{\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_\omega x_1, \\ x_0x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_1 + x_{1+\omega}x_{1+\omega^2}x_{\omega^2}x_\omega, \\ x_0x_{1+\omega+\omega^2}x_{1+\omega^2}x_\omega + x_{\omega+\omega^2}x_1x_{1+\omega}x_{\omega^2}, \\ x_0x_{1+\omega^2}x_1x_{\omega^2} + x_{1+\omega+\omega^2}x_\omega x_{\omega+\omega^2}x_{1+\omega}, \\ x_0x_1x_\omega x_{1+\omega} + x_{1+\omega^2}x_{\omega^2}x_{1+\omega+\omega^2}x_{\omega+\omega^2}, \end{cases}$$

est une fonction trois fois transitive qui a 30 valeurs *); or on passe de la fonction F à la fonction F', comme on peut le vérifier, par la substitution

$$(\omega^z,\ \omega^{3z})$$

ou

$$(\omega,\ 1+\omega,\ \omega^2,\ 1+\omega^2,\ \omega+\omega^2,\ 1+\omega+\omega^2),$$

---

*) Journal de M. *Liouville*, 2me série, tome VI, page 307.

et on passe de même de F' à F. Donc la fonction F est une fonction trois fois transitive qui a 30 valeurs.

D'après cela $F-F'$ ou, si l'on veut, la fonction formée par la somme des termes (*C.*) pris positivement et la somme des termes (*D.*) pris négativement est une fonction invariable par les substitutions

$$\left(\omega^z,\ \omega^{\frac{az+b}{cz+d}}\right)$$

pour lesquelles $ad-bc$ est résidu quadratique, et qui a 240 valeurs. $F+F'$ est de plus invariable par (ω^z, ω^{3z}); donc elle est invariable par les substitutions précédentes, $ad-bc$ étant alors quelconque (excepté zéro); c'est une fonction trois fois transitive qui a 120 valeurs. On peut prendre pour cette fonction la somme des termes (*C.*) et (*D.*).

On aura encore une fonction invariable par toutes les substitutions

$$\left(\omega^z,\ \omega^{\frac{az+b}{cz+d}}\right)$$

pour lesquelles $ad-bc$ est résidu quadratique de 7, en remplaçant dans le second membre de la formule (*B.*) les x' par x^m, sans rien changer aux indices.

Paris, le 19. novembre 1861.

Tables des formes quadratiques binaires pour les déterminants négatifs depuis $D=-1$ jusqu'à $D=-100$, pour les déterminants positifs non carrés depuis $D=2$ jusqu'à $D=99$ et pour les treize déterminants négatifs irréguliers qui se trouvent dans le premier millier.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

Les tables suivantes sont arrangées de la manière préscrite dans les „*Disquisitiones arithmeticae*“. Dans le mémoire de *Lejeune Dirichlet* „Recherches sur diverses applications de l'analyse à la théorie des nombres“ tom. XIX (1839), p. 338 de ce Journal on trouve un tableau dans lequel les règles qui servent à former les caractères des genres sont résumées. Soit $D=PS^2$ ou $2PS^2$, S^2 désignant le plus grand carré que D contient, et P un nombre impair; soient de plus $p, p', p''\ldots$ les facteurs premiers inégaux de P et $r, r', r''\ldots$ les nombres premiers impairs qui divisent S sans diviser P; écrivons enfin pour abréger $\delta=(-)^{\frac{m-1}{2}}$, $\varepsilon=(-)^{\frac{m^2-1}{8}}$, cela posé on trouve à l'endroit cité le tableau suivant:

Premier cas, $D=PS^2$, $P\equiv 1 \pmod 4$

$S\equiv 1 \pmod 2$	$\frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	
$S\equiv 2 \pmod 4$	$\frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\delta, \frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	
$S\equiv 0 \pmod 4$	$\frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\delta, \varepsilon, \frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	

Deuxième cas, $D=PS^2$, $P\equiv 3 \pmod 4$

$S\equiv 1 \pmod 2$	$\delta, \frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	
$S\equiv 2 \pmod 4$	$\delta, \frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	
$S\equiv 0 \pmod 4$	$\delta, \frac{m}{p}, \frac{m}{p'}, \ldots$	$\varepsilon, \frac{m}{r}, \frac{m}{r'}, \ldots$	

Troisième cas, $D = 2PS^2$, $P \equiv 1 \pmod 4$

$S \equiv 1 \pmod 2$	$\varepsilon,$	$\frac{m}{p},$	$\frac{m}{p'},$	$\ldots$	$\frac{m}{r},$	$\frac{m}{r'},$	$\ldots$
$S \equiv 0 \pmod 2$	$\varepsilon,$	$\frac{m}{p},$	$\frac{m}{p'},$	$\ldots$	$\delta,$ $\frac{m}{r},$	$\frac{m}{r'},$	$\ldots$

Quatrième cas, $D = 2PS^2$, $P \equiv 3 \pmod 4$

$S \equiv 1 \pmod 2$	$\delta\varepsilon,$	$\frac{m}{p},$	$\frac{m}{p'},$	$\ldots$	$\frac{m}{r},$	$\frac{m}{r'},$	$\ldots$
$S \equiv 0 \pmod 2$	$\delta,$ $\varepsilon,$	$\frac{m}{p},$	$\frac{m}{p'},$	$\ldots$	$\frac{m}{r},$	$\frac{m}{r'},$	$\ldots$

Dans ce tableau la notation $\frac{m}{p}$ dans laquelle j'omets les parenthèses usitées, signifie le caractère d'un nombre quelconque m par rapport au nombre premier impair p, c. à. d. que m est résidu ou non résidu de p selon que $\frac{m}{p} = +1$, ou $= -1$, de même δ est le caractère de m par rapport au nombre 4, savoir $m \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$ selon que $\delta = +1$ ou $= -1$, enfin ε, $\delta\varepsilon$ sont les caractères de m par rapport au nombre 8, savoir $m \equiv 1$ ou $7 \pmod 8$ pour $\varepsilon = +1$, $\equiv 3$ ou $5 \pmod 8$ pour $\varepsilon = -1$; $m \equiv 1$ ou $3 \pmod 8$ pour $\delta\varepsilon = +1$, $\equiv 5$ ou $7 \pmod 8$ pour $\delta\varepsilon = -1$. Si pour un déterminant donné on veut former au moyen de ce tableau les caractères des genres, on prend la ligne horizontale qui convient à ce déterminant: à tous les caractères $\frac{m}{p}$, $\frac{m}{p'}$, $\ldots$ $\frac{m}{r}$, $\frac{m}{r'}$, $\ldots$ δ, ε, $\delta\varepsilon$ qui se trouvent dans la ligne horizontale, on attribue les signes $+$ ou $-$ à volonté, avec cette restriction cependant que le signe composé des signes qui se trouvent dans la première partie de la ligne dont il s'agit soit positif. Si par exemple le déterminant donné est $D = -35$, on a $D = -35 = PS^2$, $P = -35 \equiv 1 \pmod 4$, $S = 1 \equiv 1 \pmod 2$, les nombres p, p', $\ldots$ sont 5, 7, et les signes que l'on doit considérer sont $\frac{m}{5}$, $\frac{m}{7}$. Delà on obtient les caractères

$\frac{m}{5}$	$\frac{m}{7}$
$+$	$+$
$-$	$-$

il y a donc deux genres de l'ordre proprement primitif. Dans le cas dont il s'agit (et en général pour $D \equiv 1 \pmod 4$) il y a un ordre improprement primitif avec des genres qui ont les caractères identiques à ceux des genres

de l'ordre proprement primitif, les caractères se rapportant dans ce cas à la moitié d'un nombre quelconque représenté par la forme.

Pour faciliter l'impression des tables j'ai introduit deux nouvelles lettres α et β dont voici la définition. Pour tous les déterminants auxquels se rapportent mes tables c. à. d. pour les déterminants négatifs quelconques et positifs non-carrés depuis -100 jusqu'à $+99$ ainsi que pour les déterminants négatifs irréguliers du premier millier le nombre des facteurs premiers désignés ci-dessus par les lettres $p, p', p'' \ldots, r, r', r'' \ldots$ n'excède pas deux. Soit donc q le plus petit de ces facteurs premiers et q' le plus grand lorsqu'il y en a deux, je désigne par α le caractère $\frac{m}{q}$ et par β le caractère $\frac{m}{q'}$.

Dans la colonne relative à la composition et portant l'inscription Cp. je représente comme à l'ordinaire par l'unité la forme principale, par la lettre c une forme qui produit par la duplication la forme principale, par les lettres $d, e \ldots$ des formes qui la produisent par la triplication, la quadruplication etc., de manière que l'on ait $c^2 = 1$, $d^3 = 1$, $e^4 = 1$, $f^5 = 1$, $g^6 = 1$, $h^7 = 1$, $i^8 = 1$, $j^9 = 1$ etc. Les notations d, d_1 par exemple signifient deux formes différentes dont chacune produit par la triplication la forme principale. Je représente de plus par σ la forme principale de l'ordre improprement primitif et par $\sigma c, \sigma d \ldots$ des formes qui produisent σ par la duplication, la triplication .... Dans l'énumération des classes, j'ai toujours écrit en premier lieu l'ordre proprement primitif, en le faisant suivre après un trait de séparation par l'ordre improprement primitif lorsqu'il existe. Dans chacun des deux ordres les divers genres se trouvent séparés l'un de l'autre par des traits subordonnés.

Pour les déterminants positifs les périodes sont données par une abréviation facile à comprendre. Chaque forme de la période ayant son dernier coëfficient égal au premier de la suivante cette valeur identique n'a été imprimée qu'une fois, de plus les coëfficients extérieurs a, c des formes (a, b, c) ont été distingués des coëfficients b en imprimant ces derniers en caractères plus petits. Ainsi pour le déterminant 7 la période de la classe principale $(1, 0, -7)$ est donnée par les nombres

$$1, 2, -3, 1, 2, 1, -3, 2, 1$$

qui représentent la série des formes

$$(1, 2, -3), (-3, 1, 2), (2, 1, -3), (-3, 2, 1).$$

Londres, 6. novembre 1860.

Table I des formes quadratiques binaires ayant pour déterminants les nombres négatifs depuis $D=-1$ jusqu'à $D=-100$.

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−1	1, 0, 1			+			1
−2	1, 0, 2					+	1
−3	1, 0, 3	+					1
	2, 1, 2	+					σ
−4	1, 0, 4			+			1
−5	1, 0, 5	+		+			1
	2, 1, 3	−		−			c
−6	1, 0, 6	+			+		1
	2, 0, 3	−			−		c
−7	1, 0, 7	+					1
	2, 1, 4	+					σ
−8	1, 0, 8			+	+		1
	3, 1, 3			−	−		c
−9	1, 0, 9	+		+			1
	2, 1, 5	−		+			c
−10	1, 0, 10	+				+	1
	2, 0, 5	−				−	c
−11	1, 0, 11	+					1
	3, 1, 4	+					d
	3, −1, 4	+					d^2
	2, 1, 6	+					σ
−12	1, 0, 12	+		+			1
	3, 0, 4	+		−			c
−13	1, 0, 13	+		+			1
	2, 1, 7	−		−			c
−14	1, 0, 14	+			+		1
	2, 0, 7	+			+		e^2
	3, 1, 5	−			−		e
	3, −1, 5	−			−		e^3
−15	1, 0, 15	+	+				1
	3, 0, 5	−	−				c
	2, 1, 8	+	+				σ
	4, 1, 4	−	−				σc
−16	1, 0, 16			+	+		1
	4, 2, 5			+	−		c
−17	1, 0, 17	+		+			1
	2, 1, 9	+		+			e^2
	3, 1, 6	−		−			e
	3, −1, 6	−		−			e^3
−18	1, 0, 18	+				+	1
	2, 0, 9	−				+	c
−19	1, 0, 19	+					1
	4, 1, 5	+					d
	4, −1, 5	+					d^2
	2, 1, 10	+					σ

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−20	1, 0, 20	+		+			1
	2, 0, 5	+		+			e^2
	3, 1, 7	−		−			e
	3, −1, 7	−		−			e^3
−21	1, 0, 21	+	+	+			1
	3, 0, 7	+	−	−			c
	2, 1, 11	−	+	−			c_1
	5, 2, 5	−	−	+			cc_1
−22	1, 0, 22	+			+		1
	2, 0, 11	−			−		c
−23	1, 0, 23	+					1
	3, 1, 8	+					d
	3, −1, 8	+					d^2
	2, 1, 12	+					σ
	4, −1, 6	+					σd
	4, 1, 6	+					σd^2
−24	1, 0, 24	+		+	+		1
	3, 0, 8	−		−	−		c
	5, 1, 5	−		+	−		c_1
	4, 2, 7	+		−	+		cc_1
−25	1, 0, 25	+		+			1
	2, 1, 13	−		+			c
−26	1, 0, 26	+				+	1
	3, −1, 9	+				+	g^2
	3, 1, 9	+				+	g^4
	5, 2, 6	−				−	g
	2, 0, 13	−				−	g^3
	5, −2, 6	−				−	g^5
−27	1, 0, 27	+					1
	4, 1, 7	+					d
	4, −1, 7	+					d^2
	2, 1, 14	+					σ
−28	1, 0, 28	+		+			1
	4, 0, 7	+		−			c
−29	1, 0, 29	+		+			1
	5, 1, 6	+		+			g^2
	5, −1, 6	+		+			g^4
	3, 1, 10	−		−			g
	2, 1, 15	−		−			g^3
	3, −1, 10	−		−			g^5
−30	1, 0, 30	+	+		+		1
	2, 0, 15	−	−		+		c
	3, 0, 10	+	−		−		c_1
	5, 0, 6	−	+		−		cc_1

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−31	1, 0, 31	+					1
	5, 2, 7	+					d
	5, −2, 7	+					d^2
	2, 1, 16	+					σ
	4, −1, 8	+					σd
	4, 1, 8	+					σd^2
−32	1, 0, 32			+	+		1
	4, 2, 9			+	+		e^2
	3, 1, 11			−	−		e
	3, −1, 11			−	−		e^3
−33	1, 0, 33	+	+	+			1
	2, 1, 17	−	−	+			c
	3, 0, 11	−	+	−			c_1
	6, 3, 7	+	−	−			cc_1
−34	1, 0, 34	+				+	1
	2, 0, 17	+				+	e^2
	5, 1, 7	−				−	e
	7, −1, 7	−				−	e^3
−35	1, 0, 35	+	+				1
	4, 1, 9	+	+				g^2
	4, −1, 9	+	+				g^4
	3, −1, 12	−	−				g
	5, 0, 7	−	−				g^3
	3, 1, 12	−	−				g^5
	2, 1, 18	+	+				σ
	6, 1, 6	−	−				σg
−36	1, 0, 36	+		+			1
	4, 0, 9	+		+			e^2
	5, 2, 8	−		+			e
	5, −2, 8	−		+			e^3
−37	1, 0, 37	+		+			1
	2, 1, 19	−		−			c
−38	1, 0, 38	+			+		1
	6, 2, 7	+			+		g^2
	6, −2, 7	+			+		g^4
	3, 1, 13	−			−		g
	2, 0, 19	−			−		g^3
	3, −1, 13	−			−		g^5
−39	1, 0, 39	+	+				1
	3, 0, 13	+	+				e^2
	5, 1, 8	−	−				e
	5, −1, 8	−	−				e^3
	2, 1, 20	+	+				σ
	6, 3, 8	+	+				σe^2
	4, −1, 10	−	−				σe
	4, 1, 10	−	−				σe^3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−40	1, 0, 40	+				+	1
	4, 2, 11	+				+	e
	5, 0, 8	−				−	e_1
	7, 3, 7	−				−	ee_1
−41	1, 0, 41	+		+			1
	5, 2, 9	+		+			i^2
	2, 1, 21	+		+			i^4
	5, −2, 9	+		+			i^6
	3, 1, 14	−		−			i
	6, −1, 7	−		−			i^3
	6, 1, 7	−		−			i^5
	3, −1, 14	−		−			i^7
−42	1, 0, 42	+	+			+	1
	2, 0, 21	−	+			−	e
	3, 0, 14	−	−			+	e_1
	6, 0, 7	+	−			−	ee_1
−43	1, 0, 43	+					1
	4, 1, 11	+					d
	4, −1, 11	+					d^2
	2, 1, 22	+					σ
−44	1, 0, 44	+		+			1
	5, −1, 9	+		+			g^2
	5, 1, 9	+		+			g^4
	3, 1, 15	+		−			g
	4, 0, 11	+		−			g^3
	3, −1, 15	+		−			g^5
−45	1, 0, 45	+	+	+			1
	5, 0, 9	−	+	+			e
	2, 1, 23	−	−	−			e_1
	7, 2, 7	+	−	−			ee_1
−46	1, 0, 46	+			+		1
	2, 0, 23	+			+		e^2
	5, 2, 10	−			−		e
	5, −2, 10	−			−		e^3
−47	1, 0, 47	+					1
	3, 1, 16	+					f
	7, 3, 8	+					f^2
	7, −3, 8	+					f^3
	3, −1, 16	+					f^4
	2, 1, 24	+					σ
	6, 1, 8	+					σf
	4, 1, 12	+					σf^2
	4, −1, 12	+					σf^3
	6, −1, 8	+					σf^4
−48	1, 0, 48	+		+	+		1
	3, 0, 16	+		−	−		e
	7, 1, 7	+		−	+		e_1
	4, 2, 13	+		+	−		ee_1
−49	1, 0, 49	+		+			1
	2, 1, 25	+		+			e^2
	5, 1, 10	−		−			e
	5, −1, 10	−		−			e^3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−50	1, 0, 50	+				+	1
	6, 2, 9	+				+	g^2
	6, −2, 9	+				+	g^4
	3, 1, 17	−				+	g
	2, 0, 25	−				+	g^3
	3, −1, 17	−				+	g^5
−51	1, 0, 51	+	+				1
	4, 1, 13	+	+				g^2
	4, −1, 13	+	+				g^4
	5, 2, 11	−	−				g
	3, 0, 17	−	−				g^3
	5, −2, 11	−	−				g^5
	2, 1, 26	+	+				σ
	6, 3, 10	−	−				σg
−52	1, 0, 52	+		+			1
	4, 0, 13	+		+			e^2
	7, 2, 8	−		−			e
	7, −2, 8	−		−			e^3
−53	1, 0, 53	+		+			1
	6, −1, 9	+		+			g^2
	6, 1, 9	+		+			g^4
	3, 1, 18	−		−			g
	2, 1, 27	−		−			g^3
	3, −1, 18	−		−			g^5
−54	1, 0, 54	+				+	1
	7, 3, 9	+				+	g^2
	7, −3, 9	+				+	g^4
	5, 1, 11	−				−	g
	2, 0, 27	−				−	g^3
	5, −1, 11	−				−	g^5
−55	1, 0, 55	+	+				1
	5, 0, 11	+	+				e^2
	7, 1, 8	−	−				e
	7, −1, 8	−	−				e^3
	2, 1, 28	+	+				σ
	8, 3, 8	+	+				σe^2
	4, 1, 14	−	−				σe
	4, −1, 14	−	−				σe^3
−56	1, 0, 56	+		+	+		1
	8, 4, 9	+		+	+		e^2
	5, 2, 12	−		+	−		e
	5, −2, 12	−		+	−		e^3
	4, 2, 15	+		−	+		c
	7, 0, 8	+		−	+		ce^2
	3, 1, 19	−		−	−		ce
	3, −1, 19	−		−	−		ce^3
−57	1, 0, 57	+	+	+			1
	3, 0, 19	+	−	−			c
	2, 1, 29	−	−	+			c_1
	6, 3, 11	−	+	−			cc_1
−58	1, 0, 58	+				+	1
	2, 0, 29	−				−	c

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−59	1, 0, 59	+					1
	3, 1, 20	+					j
	7, 2, 9	+					j^2
	4, 1, 15	+					j^3
	5, −1, 12	+					j^4
	5, 1, 12	+					j^5
	4, −1, 15	+					j^6
	7, −2, 9	+					j^7
	3, −1, 20	+					j^8
	2, 1, 30	+					σ
	6, 1, 10	+					σj
	6, −1, 10	+					σj^2
−60	1, 0, 60	+	+	+			1
	3, 0, 20	−	−	−			e
	4, 0, 15	+	+	−			e_1
	5, 0, 12	−	−	+			ee_1
−61	1, 0, 61	+		+			1
	5, −2, 13	+		+			g^2
	5, 2, 13	+		+			g^4
	7, 3, 10	−		−			g
	2, 1, 31	−		−			g^3
	7, −3, 10	−		−			g^5
−62	1, 0, 62	+		+			1
	7, 1, 9	+		+			g^2
	7, −1, 9	+		+			g^4
	6, 2, 11	−		−			g
	2, 0, 31	−		−			g^3
	6, −2, 11	−		−			g^5
−63	1, 0, 63	+	+				1
	7, 0, 9	+	+				e^2
	8, 3, 9	−	+				e
	8, −3, 9	−	+				e^3
	2, 1, 32	+	+				σ
	8, 1, 8	+	+				σe^2
	4, −1, 16	−	+				σe
	4, 1, 16	−	+				σe^3
−64	1, 0, 64			+			1
	5, 1, 13			+			f
	4, 2, 17			+			f^2
	4, −2, 17			+			f^3
	5, −1, 13			+			f^4
−65	1, 0, 65	+	+	+			1
	9, 4, 9	+	+	+			e^2
	3, 1, 22	−	+	−			e
	3, −1, 22	−	+	−			e^3
	5, 0, 13	−	−	+			c
	2, 1, 33	−	−	+			ce^2
	6, −1, 11	+	−	−			ce
	6, 1, 11	+	−	−			ce^3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−66	1, 0, 66	+	+			+	1
	3, 0, 22	+	+			+	e^2
	7, 2, 10	+	−			−	e
	7, −2, 10	+	−			−	e^3
	2, 0, 33	−	−			+	c
	6, 0, 11	−	−			+	ce^2
	5, −2, 14	−	+			−	ce
	5, 2, 14	−	+			−	ce^3
−67	1, 0, 67	+					1
	4, 1, 17	+					d
	4, −1, 17	+					d^2
	2, 1, 34	+					σ
−68	1, 0, 68	+		+			1
	8, 2, 9	+		+			i^2
	4, 0, 17	+		+			i^4
	8, −2, 9	+		+			i^6
	3, 1, 23	+		−			i
	7, −3, 11	+		−			i^3
	7, 3, 11	+		−			i^5
	3, −1, 23	+		−			i^7
−69	1, 0, 69	+	+	+			1
	6, 3, 13	+	+	+			e^2
	5, 1, 14	−	−	+			e
	5, −1, 14	−	−	+			e^3
	2, 1, 35	−	+	−			c
	3, 0, 22	−	+	−			ce^2
	7, −1, 10	+	−	−			ce
	7, 1, 10	+	−	−			ce^3
−70	1, 0, 70	+	+		+		1
	2, 0, 35	−	+		−		c
	5, 0, 14	+	−		−		c_1
	7, 0, 10	−	−		+		cc_1
−71	1, 0, 71	+					1
	3, 1, 24	+					h
	8, −1, 9	+					h^2
	5, −2, 15	+					h^3
	5, 2, 15	+					h^4
	8, 1, 9	+					h^5
	3, −1, 24	+					h^6
	2, 1, 36	+					σ
	6, 1, 12	+					σh
	4, −1, 18	+					σh^2
	8, −3, 10	+					σh^3
	8, 3, 10	+					σh^4
	4, 1, 18	+					σh^5
	6, −1, 12	+					σh^6
−72	1, 0, 72	+		+	+		1
	4, 2, 19	+		−	−		c
	8, 0, 9	−		+	+		c_1
	8, 4, 11	−		−	−		cc_1
−73	1, 0, 73	+		+			1
	2, 1, 37	+		+			e^2
	7, 2, 11	−		−			e
	7, −2, 11	−		−			e^3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−74	1, 0, 74	+				+	1
	3, −1, 25	+				+	k^2
	9, −4, 10	+				+	k^4
	9, 4, 10	+				+	k^6
	3, 1, 25	+				+	k^8
	5, 1, 15	−				−	k
	6, −2, 13	−				−	k^3
	2, 0, 37	−				−	k^5
	6, 2, 13	−				−	k^7
	5, −1, 15	−				−	k^9
−75	1, 0, 75	+	+				1
	4, −1, 19	+	+				g^2
	4, 1, 19	+	+				g^4
	7, 3, 12	+	−				g
	3, 0, 25	+	−				g^3
	7, −3, 12	+	−				g^5
	2, 1, 38	+	+				σ
	6, 3, 14	+	−				σg
−76	1, 0, 76	+		+			1
	5, −2, 16	+		+			g^2
	5, 2, 16	+		+			g^4
	7, 1, 11	+		−			g
	4, 0, 19	+		−			g^3
	7, −1, 11	+		−			g^5
−77	1, 0, 77	+	+	+			1
	9, 2, 9	+	+	+			e^2
	6, 1, 13	−	−	+			e
	6, −1, 13	−	−	+			e^3
	2, 1, 39	+	−	−			c
	7, 0, 11	+	−	−			ce^2
	3, 1, 26	−	+	−			ce
	3, −1, 26	−	+	−			ce^3
−78	1, 0, 78	+	+		+		1
	2, 0, 39	−	−		+		c
	3, 0, 26	−	+		−		c_1
	6, 0, 13	+	−		−		cc_1
−79	1, 0, 79	+					1
	5, 1, 16	+					f
	8, −3, 11	+					f^2
	8, 3, 11	+					f^3
	5, −1, 16	+					f^4
	2, 1, 40	+					σ
	8, −1, 10	+					σf
	4, 1, 20	+					σf^2
	4, −1, 20	+					σf^3
	8, 1, 10	+					σf^4
−80	1, 0, 80	+			+	+	1
	9, 1, 9	+			+	+	e^2
	3, 1, 27	−			−	−	e
	3, −1, 27	−			−	−	e^3
	5, 0, 16	+			+	−	c
	4, 2, 21	+			+	−	ce^2
	7, −2, 12	−			−	+	ce
	7, 2, 12	−			−	+	ce^3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−81	1, 0, 81	+		+			1
	9, −3, 10	+		+			g^2
	9, 3, 10	+		+			g^4
	5, 2, 17	−		+			g
	2, 1, 41	−		+			g^3
	5, −2, 17	−		+			g^5
−82	1, 0, 82	+				+	1
	2, 0, 41	+				+	e^2
	7, 3, 13	−				−	e
	7, −3, 13	−				−	e^3
−83	1, 0, 83	+					1
	3, 1, 28	+					j
	9, 4, 11	+					j^2
	4, 1, 21	+					j^3
	7, −1, 12	+					j^4
	7, 1, 12	+					j^5
	4, −1, 21	+					j^6
	9, −4, 11	+					j^7
	3, −1, 28	+					j^8
	2, 1, 42	+					σ
	6, 1, 14	+					σj
	6, −1, 14	+					σj^2
−84	1, 0, 84	+	+	+			1
	4, 0, 21	+	+	+			e^2
	5, 1, 17	−	−	+			e
	5, −1, 17	−	−	+			e^3
	3, 0, 28	+	−	−			c
	7, 0, 12	+	−	−			ce^2
	8, 2, 11	−	+	−			ce
	8, −2, 11	−	+	−			ce^3
−85	1, 0, 85	+	+	+			1
	5, 0, 17	−	−	+			c
	2, 1, 43	−	+	−			c_1
	10, 5, 11	+	−	−			cc_1
−86	1, 0, 86	+				+	1
	6, 2, 15	+				+	k^2
	9, 2, 10	+				+	k^4
	9, −2, 10	+				+	k^6
	6, −2, 15	+				+	k^8
	5, 2, 18	−				−	k
	3, 1, 29	−				−	k^3
	2, 0, 43	−				−	k^5
	3, −1, 29	−				−	k^7
	5, −2, 18	−				−	k^9
−87	1, 0, 87	+	+				1
	7, 2, 13	+	+				g^2
	7, −2, 13	+	+				g^4
	8, 1, 11	−	−				g
	3, 0, 29	−	−				g^3
	8, −1, 11	−	−				g^5
	2, 1, 44	+	+				σ
	8, −3, 12	+	+				σg^2
	8, 3, 12	+	+				σg^4
	4, 1, 22	−	−				σg
	6, 3, 16	−	−				σg^3
	4, −1, 22	−	−				σg^5

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−88	1, 0, 88	+			+		1
	4, 2, 23	+			+		c
	8, 0, 11	−			−		c_1
	8, 4, 13	−			−		cc_1
−89	1, 0, 89	+		+			1
	9, 1, 10	+		+			m^2
	5, 1, 18	+		+			m^4
	2, 1, 45	+		+			m^6
	5, −1, 18	+		+			m^8
	9, −1, 10	+		+			m^{10}
	3, 1, 30	−		−			m
	7, −3, 14	−		−			m^3
	6, −1, 15	−		−			m^5
	6, 1, 15	−		−			m^7
	7, 3, 14	−		−			m^9
	3, −1, 30	−		−			m^{11}
−90	1, 0, 90	+	+			+	1
	9, 0, 10	+	+			+	e^2
	7, 1, 13	+	−			−	e
	7, −1, 13	+	−			−	e^3
	2, 0, 4	−	−			−	c
	5, 0, 18	−	−			−	ce^2
	9, −3, 11	−	+			+	ce
	9, 3, 11	−	+			+	ce^3
−91	1, 0, 91	+	+				1
	4, 1, 23	+	+				g^2
	4, −1, 23	+	+				g^4
	5, −2, 19	−	−				g
	7, 0, 13	−	−				g^3
	5, 2, 19	−	−				g^5
	2, 1, 46	+	+				σ
	10, 3, 10	−	−				σg

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−92	1, 0, 92	+		+			1
	9, 4, 12	+		+			g^2
	9, −4, 12	+		+			g^4
	3, 1, 31	+		−			g
	4, 0, 23	+		−			g^3
	3, −1, 31	+		−			g^5
−93	1, 0, 93	+	+	+			1
	3, 0, 31	+	−	−			c
	2, 1, 47	−	+	−			c_1
	6, 3, 17	−	−	+			cc_1
−94	1, 0, 94	+			+		1
	7, 2, 14	+			+		i^2
	2, 0, 47	+			+		i^4
	7, −2, 14	+			+		i^6
	5, 1, 19	−			−		i
	10, 4, 11	−			−		i^3
	10, −4, 11	−			−		i^5
	5, −1, 19	−			−		i^7
−95	1, 0, 95	+	+				1
	9, −2, 11	+	+				i^2
	5, 0, 19	+	+				i^4
	9, 2, 11	+	+				i^6
	3, 1, 32	−	−				i
	8, 3, 13	−	−				i^3
	8, −3, 13	−	−				i^5
	3, −1, 32	−	−				i^7
	2, 1, 48	+	+				σ
	8, 1, 12	+	+				σi^2
	10, 5, 12	+	+				σi^4
	8, −1, 12	+	+				σi^6
	6, 1, 16	−	−				σi
	4, −1, 24	−	−				σi^3
	4, 1, 24	−	−				σi^5
	6, −1, 16	−	−				σi^7

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp
−96	1, 0, 96	+		+	+		1
	4, 2, 25	+		+	+		e^2
	5, 2, 20	−		+	−		e
	5, −2, 20	−		+	−		e^3
	3, 0, 32	−		−	−		c
	11, 5, 11	−		−	−		ce^2
	7, 3, 15	+		−	+		ce
	7, −3, 15	+		−	+		ce^3
−97	1, 0, 97	+		+			1
	2, 1, 49	+		+			e^2
	7, 1, 14	−		−			e
	7, −1, 14	−		−			e^3
−98	1, 0, 98	+				+	1
	9, 1, 11	+				+	i^2
	2, 0, 49	+				+	i^4
	9, −1, 11	+				+	i^6
	3, 1, 33	−				+	i
	6, 2, 17	−				+	i^3
	6, −2, 17	−				+	i^5
	3, −1, 33	−				+	i^7
−99	1, 0, 99	+	+				1
	4, −1, 25	+	+				g^2
	4, 1, 25	+	+				g^4
	5, 1, 20	−	+				g
	9, 0, 11	−	+				g^3
	5, −1, 20	−	+				g^5
	2, 1, 50	+	+				σ
	10, 1, 10	−	+				σg
−100	1, 0, 100	+		+			1
	4, 0, 25	+		+			e^2
	8, 2, 13	−		+			e
	8, −2, 13	−		+			e^3

Table II des formes quadratiques binaires ayant pour déterminants les nombres positifs non-carrés depuis $D = 2$ jusqu'a $D = 99$.

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
2	1, 0, −2				+	−	1	1, 1, −1, 1, 1
3	1, 0, −3	+	−	+		−	1	1, 1, −2, 1, 1
	−1, 0, 3	−		−			c	−1, 1, 2, 1, −1
5	1, 0, −5	+	−	−	−	−	1	1, 2, −1, 2, 1
	2, 1, −2	+	−	−	−	−	σ	2, 1, −2, 1, 2
6	1, 0, −6	+	−	−	−	+	1	1, 2, −2, 2, 1
	−1, 0, 6	−				−	c	−1, 2, 2, 2, −1
7	1, 0, −7	+	−	+			1	1, 2, −3, 1, 2, 1, −3, 2, 1
	−1, 0, 7	−		−			c	−1, 2, 3, 1, −2, 1, 3, 2, −1
8	1, 0, −8			+	+		1	1, 2, −4, 2, 1
	−1, 0, 8			−	+		c	−1, 2, 4, 2, −1
10	1, 0, −10	+	−		+		1	1, 3, −1, 3, 1
	2, 0, −5	−			−		c	2, 2, −3, 1, 3, 2, −2, 2, 3, 1, −3, 2, 2
11	1, 0, −11	+	−	+		−	1	1, 3, −2, 3, 1
	−1, 0, 11	−		−			c	−1, 3, 2, 3, −1
12	1, 0, −12	+	−	+	−	−	1	1, 3, −3, 3, 1
	−1, 0, 12	−	−	−	−	−	c	−1, 3, 3, 3, −1
13	1, 0, −13	+	−	−	−	−	1	1, 3, −4, 1, 3, 2, −3, 1, 4, 3, −1, 3, 4, 1, −3, 2, 3, 1, −4, 3, 1
	2, 1, −6	+	−	−	−	−	σ	2, 3, −2, 3, 2
14	1, 0, −14	+				+	1	1, 3, −5, 2, 2, 2, −5, 3, 1
	−1, 0, 14	−				−	c	−1, 3, 5, 2, −2, 2, 5, 3, −1
15	1, 0, −15	+	+	+			1	1, 3, −6, 3, 1
	−1, 0, 15	−	+	−			c	−1, 3, 6, 3, −1
	2, 1, −7	−	−	+			c_1	2, 3, −3, 3, 2
	−2, 1, 7	+	−	−		−	cc_1	−2, 3, 3, 3, −2
17	1, 0, −17	+	−	−	−	−	1	1, 4, −1, 4, 1
	2, 1, −8	+	−	−	−	−	σ	2, 3, −4, 1, 4, 3, −2, 3, 4, 1, −4, 3, 2
18	1, 0, −18	+	−		+	−	1	1, 4, −2, 4, 1
	−1, 0, 18	−			+		c	−1, 4, 2, 4, −1
19	1, 0, −19	+		+		−	1	1, 4, −3, 2, 5, 3, −2, 3, 5, 2, −3, 4, 1
	−1, 0, 19	−		−			c	−1, 4, 3, 2, −5, 3, 2, 3, −5, 2, 3, 4, −1
20	1, 0, −20	+	−	+		−	1	1, 4, −4, 4, 1
	−1, 0, 20	+	−	−		−	c	−1, 4, 4, 4, −1
21	1, 0, −21	+	+			−	1	1, 4, −5, 1, 4, 3, −3, 3, 4, 1, −5, 4, 1
	−1, 0, 21	−	−				c	−1, 4, 5, 1, −4, 3, 3, 3, −4, 1, 5, 4, −1
	2, 1, −10	+	+		−	−	σ	2, 3, −6, 3, 2
	−2, 1, 10	−	−			−	σc	−2, 3, 6, 3, −2
22	1, 0, −22	+				+	1	1, 4, −6, 2, 3, 4, −2, 4, 3, 2, −6, 4, 1
	−1, 0, 22	−	−			−	c	−1, 4, 6, 2, −3, 4, 2, 4, −3, 2, 6, 4, −1
23	1, 0, −23	+		+			1	1, 4, −7, 3, 2, 3, −7, 4, 1
	−1, 0, 23	−	−	−		−	c	−1, 4, 7, 3, −2, 3, 7, 4, −1
24	1, 0, −24	+		+	+		1	1, 4, −8, 4, 1
	−1, 0, 24	−		−	+		c	−1, 4, 8, 4, −1
	3, 0, −8	+		−	−		c_1	3, 3, −5, 2, 4, 2, −5, 3, 3
	−3, 0, 8	−		+	−		cc_1	−3, 3, 5, 2, −4, 2, 5, 3, −3

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
26	1, 0, −26	+			+		1	1, 5, −1, 5, 1
	2, 0, −13	−			−		c	2, 4, −5, 1, 5, 4, −2 4, 5, 1, −5, 4, 2
27	1, 0, −27	+		+			1	1, 5, −2, 5, 1
	−1, 0, 27	−		−			c	−1, 5, 2, 5, −1
28	1, 0, −28	+		+			1	1, 5, −3, 4, 4, 4, −3, 5, 1
	−1, 0, 28	−		−			c	−1, 5, 3, 4, −4, 4, 3, 5, −1
29	1, 0, −29	+					1	1, 5, −4, 3, 5, 2, −5, 3, 4, 5, −1, 5, 4, 3, −5, 2, 5, 3, −4, 5, 1
	2, 1, −14	+					σ	−1, 5, 4, 3, −5, 2, 5, 3, −4, 5, 1, 5, −4, 3, 5, 2, −5, 3, 4, 5, −1
30	1, 0, −30	+	+			+	1	1, 5, −5, 5, 1
	−1, 0, 30	−	+			−	c	−1, 5, 5, 5, −1
	2, 0, −15	−	−			+	c_1	2, 4, −7, 3, 3, 3, −7, 4, 2
	−2, 0, 15	+	−			−	cc_1	−2, 4, 7, 3, −3, 3, 7, 4, −2
31	1, 0, −31	+		+			1	1, 5, −6, 1, 5, 4, −3, 5, 2, 5, −3, 4, 5, 1, −6, 5, 1
	−1, 0, 31	−		−			c	−1, 5, 6, 1, −5, 4, 3, 5, −2, 5, 3, 4, −5, 1, 6, 5, −1
32	1, 0, −32			+	+		1	1, 5, −7, 2, 4, 2, −7, 5, 1
	−1, 0, 32			−	+		c	−1, 5, 7, 2, −4, 2, 7, 5, −1
33	1, 0, −33	+	+				1	1, 5, −8, 3, 3, 3, −8, 5, 1
	−1, 0, 33	−	−				c	−1, 5, 8, 3, −3, 3, 8, 5, −1
	2, 1, −16	+	+				σ	2, 5, −4, 3, 6, 3, −4, 5, 2
	−2, 1, 16	−	−				σc	−2, 5, 4, 3, −6, 3, 4, 5, −2
34	1, 0, −34	+			+		1	1, 5, −9, 4, 2, 4, −9, 5, 1
	−1, 0, 34	+			+		e^2	−1, 5, 9, 4, −2, 4, 9, 5, −1
	3, −1, −11	−			−		e	3, 5, −3, 4, 6, 2, −5, 3, 5, 2, −6, 4, 3
	−3, −1, 11	−			−		e^3	−3, 5, 3, 4, −6, 2, 5, 3, −5, 2, 6, 4, −3
35	1, 0, −35	+	+	+			1	1, 5, −10, 5, 1
	−1, 0, 35	+	−	−			c	−1, 5, 10, 5, −1
	2, 1, −17	−	+	−			c_1	2, 5, −5, 5, 2
	−2, 1, 17	−	−	+			cc_1	−2, 5, 5, 5, −2
37	1, 0, −37	+					1	1, 6, −1, 6, 1
	3, 1, −12	+					d	3, 4, −7, 3, 4, 5, −3, 4, 7, 3, −4, 5, 3
	3, −1, −12	+					d^2	−3, 4, 7, 3, −4, 5, 3, 4 −7, 3, 4, 5, −3
	2, 1, −18	+					σ	2, 5, −6, 1, 6, 5, −2, 5, 6, 1, −6, 5, 2
38	1, 0, −38	+				+	1	1, 6, −2, 6, 1
	−1, 0, 38	−				−	c	−1, 6, 2, 6, −1
39	1, 0, −39	+	+	+			1	1, 6, −3, 6, 1
	−1, 0, 39	−	+	−			c	−1, 6, 3, 6, −1
	2, 1, −19	−	−	+			c_1	2, 5, −7, 2, 5, 3, −6, 3, 5, 2, −7, 5, 2
	−2, 1, 19	+	−	−			cc_1	−2, 5, 7, 2, −5, 3, 6, 3, −5, 2, 7, 5, −2
40	1, 0, −40	+		+	+		1	1, 6, −4, 6, 1
	−1, 0, 40	+		−	+		c	−1, 6, 4, 6, −1
	3, 1, −13	−		−	−		c_1	3, 4, −8, 4, 3, 5, −5, 5, 3
	−3, 1, 13	−		+	−		cc_1	−3, 4, 8, 4, −3, 5, 5, 5, −3
41	1, 0, −41	+					1	1, 6, −5, 4, 5, 6, −1, 6, 5, 4, −5, 6, 1
	2, 1, −20	+					σ	−1, 6, 5, 4, −5, 6, 1, 6, −5, 4, 5, 6, −1
42	1, 0, −42	+	+		+		1	1, 6, −6, 6, 1
	−1, 0, 42	−	−		+		c	−1, 6, 6, 6, −1
	2, 0, −21	−	+		−		c_1	2, 6, −3, 6, 2
	−2, 0, 21	+	−		−		cc_1	−2, 6, 3, 6, −2
43	1, 0, −43	+		+			1	1, 6, −7, 1, 6, 5, −3, 4, 9, 5, −2, 5, 9, 4, −3, 5, 6, 1, −7, 6, 1
	−1, 0, 43	−		−			c	−1, 6, 7, 1, −6, 5, 3, 4, −9, 5, 2, 5, −9, 4, 3, 5, −6, 1, 7, 6, −1

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
44	1, 0, −44	+		+			1	1, 6, −8, 2, 5, 3, −7, 4, 4, 4, −7, 3, 5, 2, −8, 6, 1
	−1, 0, 44	−		−			c	−1, 6, 8, 2, −5, 3, 7, 4, −4, 4, 7, 3, −5, 2, 8, 6, −1
45	1, 0, −45	+	+	−	−	−	1	1, 6, −9, 3, 4, 5, −5, 5, 4, 3, −9, 6, 1
	−1, 0, 45	−	+				c	−1, 6, 9, 3, −4, 5, 5, 5, −4, 3, 9, 6, −1
	2, 1, −22	+	+	−	−	−	σ	2, 5, −10, 5, 2
	−2, 1, 22	−	+				σc	−2, 5, 10, 5, −2
46	1, 0, −46	+		−	−	+	1	1, 6, −10, 4, 3, 5, −7, 2, 6, 4, −5, 6, 2, 6, −5, 4, 6, 2, −7, 5, 3, 4, −10, 6, 1
	−1, 0, 46	−					c	−1, 6, 10, 4, −3, 5, 7, 2, −6, 4, 5, 6, −2, 6, 5, 4, −6, 2, 7, 5, −3, 4, 10, 6, −1
47	1, 0, −47	+		+	−	−	1	1, 6, −11, 5, 2, 5, −11, 6, 1
	−1, 0, 47	−		−			c	−1, 6, 11, 5, −2, 5, 11, 6, −1
48	1, 0, −48	+		+	+	−	1	1, 6, −12, 6, 1
	−1, 0, 48	−		−	+		c	−1, 6, 12, 6, −1
	3, 0, −16	−		−	−		c_1	3, 6, −4, 6, 3
	−3, 0, 16	+		+	−		cc_1	−3, 6, 4, 6, −3
50	1, 0, −50	+				+	1	1, 7, −1, 7, 1
	2, 0, −25	−				+	c	2, 6, −7, 1, 7, 6, −2, 6, 7, 1, −7, 6, 2
51	1, 0, −51	+	+	+	−	−	1	1, 7, −2, 7, 1
	−1, 0, 51	−	+	−			c	−1, 7, 2, 7, −1
	3, 0, −17	+	−	−			c_1	3, 6, −5, 4, 7, 3, −6, 3, 7, 4, −5, 6, 3
	−3, 0, 17	−	−	+			cc_1	−3, 6, 5, 4, −7, 3, 6, 3, −7, 4, 5, 6, −3
52	1, 0, −52	+		+	−	−	1	1, 7, −3, 5, 9, 4, −4, 4, 9, 5, −3, 7, 1
	−1, 0, 52	+		−			c	−1, 7, 3, 5, −9, 4, 4, 4, −9, 5, 3, 7, −1
53	1, 0, −53	+	−	−	−	−	1	1, 7, −4, 5, 7, 2, −7, 5, 4, 7, −1, 7, 4, 5, −7, 2, 7, 5, −4, 7, 1
	2, 1, −26	+	−	−	−	−	σ	2, 7, −2, 7, 2
54	1, 0, −54	+		−	−	+	1	1, 7, −5, 3, 9, 6, −2, 6, 9, 3, −5, 7, 1
	−1, 0, 54	−		−			c	−1, 7, 5, 3, −9, 6, 2, 6, −9, 3, 5, 7, −1
55	1, 0, −55	+	+	+	−	−	1	1, 7, −6, 5, 5, 5, −6, 7, 1
	−1, 0, 55	+	−	−			c	−1, 7, 6, 5, −5, 5, 6, 7, −1
	2, 1, −27	−	−	+			c_1	2, 7, −3, 5, 10, 5, −3, 7, 2
	−2, 1, 27	−	+	−			cc_1	−2, 7, 3, 5, −10, 5, 3, 7, −2
56	1, 0, −56	+		+	+	−	1	1, 7, −7, 7, 1
	−1, 0, 56	−		−	+		c	−1, 7, 7, 7, −1
	4, 2, −13	+		−	−		c_1	4, 6, −5, 4, 8, 4, −5, 6, 4
	−4, 2, 13	−		+	−		cc_1	−4, 6, 5, 4, −8, 4, 5, 6, −4
57	1, 0, −57	+	+	−	−	−	1	1, 7, −8, 1, 7, 6, −3, 6, 7, 1, −8, 7, 1
	−1, 0, 57	−	−				c	−1, 7, 8, 1, −7, 6, 3, 6, −7, 1, 8, 7, −1
	2, 1, −28	+	+	−	−	−	σ	2, 7, −4, 5, 8, 3, −6, 3, 8, 5, −4, 7, 2
	−2, 1, 28	−	−				σc	−2, 7, 4, 5, −8, 3, 6, 3, −8, 5, 4, 7, −2
58	1, 0, −58	+		−	+	−	1	1, 7, −9, 2, 6, 4, −7, 3, 7, 4, −6, 2, 9, 7, −1, 7, 9, 2, −6, 4, 7, 3, −7, 4, 6, 2, −9, 7, 1
	2, 0, −29	−		−	−		c	2, 6, −11, 5, 3, 7, −3, 5, 11, 6, −2, 6, 11, 5, −3, 7, 3, 5, −11, 6, 2
59	1, 0, −59	+		+	−	−	1	1, 7, −10, 3, 5, 7, −2, 7, 5, 3, −10, 7, 1
	−1, 0, 59	−		−			c	−1, 7, 10, 3, −5, 7, 2, 7, −5, 3, 10, 7, −1
60	1, 0, −60	+	+	+	−	−	1	1, 7, −11, 4, 4, 4, −11, 7, 1
	−1, 0, 60	−	+	−			c	−1, 7, 11, 4, −4, 4, 11, 7, −1
	3, 0, −20	+	−	−			c_1	3, 6, −8, 2, 7, 5, −5, 5, 7, 2, −8, 6, 3
	−3, 0, 20	−	−	+			cc_1	−3, 6, 8, 2, −7, 5, 5, 5, −7, 2, 8, 6, −3
61	1, 0, −61	+					1	1, 7, −12, 5, 3, 7, −4, 5, 9, 4, −5, 6, 5, 4, −9, 5, 4, 7, −3, 5, 12, 7, −1, 7,
	2, 1, −30	+	−	−	−	−	σ	12, 5, −3, 7, 4, 5, −9, 4, 5, 6, −5, 4, 9, 5, −4, 7, 3, 5, −12, 7, 1 2, 7, −6, 5, 6, 7, −2, 7, 6, 5, −6, 7, 2

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
62	1, 0, −62	+				+	1	1, 7, −13, 6, 2, 6, −13, 7, 1
	−1, 0, 62	−				−	c	−1, 7, 13, 6, −2, 6, 13, 7, −1
63	1, 0, −63	+	+	+			1	1, 7, −14, 7, 1
	−1, 0, 63	−	−	−			c	−1, 7, 14, 7, −1
	2, 1, −31	−	+	+			c_1	2, 7, −7, 7, 2
	−2, 1, 31	+	−	−			cc_1	−2, 7, 7, 7, −2
65	1, 0, −65	+	+				1	1, 8, −1, 8, 8, 8, −1, 8, 1
	5, 0, −13	−	−				c	5, 5, −8, 3, 7, 4, −7, 3, 8, 5, −5, 5, 8, 3, −7, 4, 7, 3, −8, 5, 5
	2, 1, −32	+	+				σ	2, 7, −8, 1, 8, 7, −2, 7, 8, 1, −8, 7, 2
	10, 5, −4	−	−				σc	10, 5, −4, 7, 4, 5, −10, 5, 4, 7, −4, 5, 10
66	1, 0, −66	+	+		+		1	1, 8, −2, 8, 1
	−1, 0, 66	−	−		+		c	−1, 8, 2, 8, −1
	3, 0, −22	−	+		−		c_1	3, 6, −10, 4, 5, 6, −6, 6, 5, 4, −10, 6, 3
	−3, 0, 22	+	−		−		cc_1	−3, 6, 10, 4, −5, 6, 6, 6, −5, 4, 10, 6, −3
67	1, 0, −67	+		+			1	1, 8, −3, 7, 6, 5, −7, 2, 9, 7, −2, 7, 9
	−1, 0, 67	−		−			c	−1, 8, 3, 7, −6, 5, 7, 2, −9, 7, 2, 7, −9
68	1, 0, −68	+		+			1	1, 8, −4, 8, 1
	−1, 0, 68	+		−			c	−1, 8, 4, 8, −1
69	1, 0, −69	+	+				1	1, 8, −5, 7, 4, 5, −11, 6, 3, 6, −11, 5, 4, 7, −5, 8, 1
	−1, 0, 69	−	−				c	−1, 8, 5, 7, −4, 5, 11, 6, −3, 6, 11, 5, −4, 7, 5, 8, −1
	2, 1, −34	+	+				σ	2, 7, −10, 3, 6, 3, −10, 7, 2
	−2, 1, 34	−	−				σc	−2, 7, 10, 3, −6, 3, 10, 7, −2
70	1, 0, −70	+	+			+	1	1, 8, −6, 4, 9, 5, −5, 5, 9, 4, −6, 8, 1
	−1, 0, 70	+	−			−	c	−1, 8, 6, 4, −9, 5, 5, 5, −9, 4, 6, 8, −1
	2, 0, −35	−	+			−	c_1	2, 8, −3, 7, 7, 7, −3, 8, 2
	−2, 0, 35	−	−			+	cc_1	−2, 8, 3, 7, −7, 7, 3, 8, −2
71	1, 0, −71	+		+			1	1, 8, −7, 6, 5, 4, −11, 7, 2, 7, −11, 4, 5, 6, −7, 8, 1
	−1, 0, 71	−		−			c	−1, 8, 7, 6, −5, 4, 11, 7, −2, 7, 11, 4, −5, 6, 7, 8, −1
72	1, 0, −72	+		+	+		1	1, 8, −8, 8, 1
	−1, 0, 72	−		−	+		c	−1, 8, 8, 8, −1
	4, 2, −17	+		−	+		c_1	4, 6, −9, 3, 7, 4, −8, 4, 7, 3, −9, 6, 4
	−4, 2, 17	−		+	+		cc_1	−4, 6, 9, 3, −7, 4, 8, 4, −7, 3, 9, 6, −4
73	1, 0, −73	+					1	1, 8, −9, 1, 8, 7, −3, 8, 3, 7, −8, 1, 9, 8, −1, 8, 9, 1, −8, 7, 3, 8, −3, 7, 8, 1, −9, 8, 1
	2, 1, −36	+					σ	2, 7, −12, 5, 4, 7, −6, 5, 8, 3, −8, 5, 6, 7, −4, 5, 12, 7, −2, 7, 12, 5, −4, 7 6, 5, −8, 3, 8, 5, −6, 7, 4, 5, −12, 7, 2
74	1, 0, −74	+			+		1	1, 8, −10, 2, 7, 5, −7, 2, 10, 8, −1, 8, 10, 2, −7, 5, 7, 2, −10, 8, 1
	2, 0, −37	−			−		c	2, 8, −5, 7, 5, 8, −2, 8, 5, 7, −5, 8, 2
75	1, 0, −75	+	+	+			1	1, 8, −11, 3, 6, 3, −11, 8, 1
	−1, 0, 75	−	+	−			c	−1, 8, 11, 3, −6, 3, 11, 8, −1
	2, 1, −37	−	−	−			c_1	2, 7, −13, 6, 3, 6, −13, 7, 2
	−2, 1, 37	+	−	+			cc_1	−2, 7, 13, 6, −3, 6, 13, 7, −2
76	1, 0, −76	+		+			1	1, 8, −12, 4, 5, 6, −8, 2, 9, 7, −3, 8, 4, 8, −3, 7, 9, 2, −8, 6, 5, 4, −12, 8, 1
	−1, 0, 76	−		−			c	−1, 8, 12, 4, −5, 6, 8, 2, −9, 7, 3, 8, −4, 8, 3, 7, −9, 2, 8, 6, −5, 4, 12, 8, −1
77	1, 0, −77	+	+				1	1, 8, −13, 5, 4, 7, −7, 7, 4, 5, −13, 8, 1
	−1, 0, 77	−	−				c	−1, 8, 13, 5, −4, 7, 7, 7, −4, 5, 13, 8, −1
	2, 1, −38	+	+				σ	2, 7, −14, 7, 2
	−2, 1, 38	−	−				σc	−2, 7, 14, 7, −2

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
78	1, 0, −78	+	+			+	1	1, 8, −14, 6, 3, 6, −14, 8, 1
	−1, 0, 78	−	+			−	c	−1, 8, 14, 6, −3, 6, 14, 8, −1
	2, 0, −39	−	−			+	c_1	2, 8, −7, 6, 6, 6, −7, 8, 2
	−2, 0, 39	+	−			−	cc_1	−2, 8, 7, 6, −6, 6, 7, 8, −2
79	1, 0, −79	+		+			1	1, 8, −15, 7, 2, 7, −15, 8, 1
	−3, −1, 26	+		+			e^2	−3, 8, 5, 7, −6, 5, 9, 4, −7, 3, 10, 7, −3
	−3, 1, 26	+		+			e^4	−3, 7, 10, 3, −7, 4, 9, 5, −6, 7, 5, 8, −3
	3, 1, −26	−		−			e	3, 7, −10, 3, 7, 4, −9, 5, 6, 7, −5, 8, 3
	−1, 0, 79	−		−			e^3	−1, 8, 15, 7, −2, 7, 15, 8, −1
	3, −1, −26	−		−			e^5	3, 8, −5, 7, 6, 5, −9, 4, 7, 3, −10, 7, 3
80	1, 0, −80	+		+	+		1	1, 8, −16, 8, 1
	−1, 0, 80	+		−	+		c	−1, 8, 16, 8, −1
	4, 2, −19	+		+	−		c_1	4, 6, −11, 5, 5, 5, −11, 6, 4
	−4, 2, 19	+		−	−		cc_1	−4, 6, 11, 5, −5, 5, 11, 6, −4
82	1, 0, −82	+			+		1	1, 9, −1, 9, 1
	2, 0, −41	+			+		e^2	2, 8, −9, 1, 9, 8, −2, 8, 9, 1, −9, 8, 2
	3, −1, −27	−			−		e	3, 8, −6, 4, 11, 7, −3, 8, 6, 4, −11, 7, 3
	−3, −1, 27	−			−		e^3	3, 7, −11, 4, 6, 8, −3, 7, 11, 4, −6, 8, 3
83	1, 0, −83	+		+			1	1, 9, −2, 9, 1
	−1, 0, 83	−		−			c	−1, 9, 2, 9, −1
84	1, 0, −84	+	+	+			1	1, 9, −3, 9, 1
	−1, 0, 84	−	−	−			c	−1, 9, 3, 9, −1
	4, 0, −21	+	+	−			c_1	4, 8, −5, 7, 7, 7, −5, 8, 4
	−4, 0, 21	−	−	+			cc_1	−4, 8, 5, 7, −7, 7, 5, 8, −4
85	1, 0, −85	+	+				1	1, 9, −4, 7, 9, 2, −9, 7, 4, 9, −1, 9, 4, 7, −9, 2, 9, 7, −4, 9, 1
	5, 0, −17	−	−				e	5, 5, −12, 7, 3, 8, −7, 6, 7, 8, −3, 7, 12, 5, −5, 5, 12, 7, −3, 8, 7, 6, −7, 8, 3, 7, −12, 5, 5
	2, 1, −42	+	+				σ	2, 9, −2, 9, 2
	10, 5, −6	−	−				σe	10, 5, −6, 7, 6, 5, −10, 5, 6, 7, −6, 5, 10
86	1, 0, −86	+				+	1	1, 9, −5, 6, 10, 4, −7, 3, 11, 8, −2, 8, 11, 3, −7, 4, 10, 6, −5, 9, 1
	−1, 0, 86	−				−	c	−1, 9, 5, 6, −10, 4, 7, 3, −11, 8, 2, 8, −11, 3, 7, 4, −10, 6, 5, 9, −1
87	1, 0, −87	+	+	+			1	1, 9, −6, 9, 1
	−1, 0, 87	−	+	−			c	−1, 9, 6, 9, −1
	2, 1, −43	−	−	+			c_1	2, 9, −3, 9, 2
	−2, 1, 43	+	−	−			cc_1	−2, 9, 3, 9, −2
88	1, 0, −88	+		+	+		1	1, 9, −7, 5, 9, 4, −8, 4, 9, 5, −7, 9, 1
	−1, 0, 88	−		−	+		c	−1, 9, 7, 5, −9, 4, 8, 4, −9, 5, 7, 9, −1
	4, 2, −21	+		−	−		c_1	4, 6, −13, 7, 3, 8, −8, 8, 3, 7, −13, 6, 4
	−4, 2, 21	−		+	−		cc_1	−4, 6, 13, 7, −3, 8, 8, 8, −3, 7, 13, 6, −4
89	1, 0, −89	+					1	1, 9, −8, 7, 5, 8, −5, 7, 8, 9, −1, 9, 8, 7, −5, 8, 5, 7, −8, 9, 1
	2, 1, −44	+					σ	2, 9, −4, 7, 10, 3, −8, 5, 8, 3, −10, 7, 4, 9, −2, 9, 4, 7, −10, 3, 8, 5, −8, 3, 10, 7, −4, 9, 2
90	1, 0, −90	+	+		+		1	1, 9, −9, 9, 1
	−1, 0, 90	−	+		+		c	−1, 9, 9, 9, −1
	2, 0, −45	−	−		−		c_1	2, 8, −13, 5, 5, 5, −13, 8, 2
	−2, 0, 45	+	−		−		cc_1	−2, 8, 13, 5, −5, 5, 13, 8, −2
91	1, 0, −91	+	+	+			1	1, 9, −10, 1, 9, 8, −3, 7, 14, 7, −3, 8, 9, 1, −10, 9, 1
	−1, 0, 91	−	+	−			c	−1, 9, 10, 1, −9, 8, 3, 7, −14, 7, 3, 8, −9, 1, 10, 9, −1
	2, 1, −45	+	−	−			c_1	2, 9, −5, 6, 11, 5, −6, 7, 7, 7, −6, 5, 11, 6, −5, 9, 2
	−2, 1, 45	−	−	+			cc_1	−2, 9, 5, 6, −11, 5, 6, 7, −7, 7, 6, 5, −11, 6, 5, 9, −2

D	Classes	α	β	δ	ε	$\delta\varepsilon$	Cp	Périodes.
92	1, 0, −92	+		+			1	1, 9, −11, 2, 8, 6, −7, 8, 4, 8, −7, 6, 8, 2, −11, 9, 1
	−1, 0, 92	−		−			c	−1, 9, 11, 2, −8, 6, 7, 8, −4, 8, 7, 6, −8, 2, 11, 9, −1
93	1, 0, −93	+	+				1	1, 9, −12, 3, 7, 4, −11, 7, 4, 9, −3, 9, 4, 7, −11, 4, 7, 3, −12, 9, 1
	−1, 0, 93	−	−				c	−1, 9, 12, 3, −7, 4, 11, 7, −4, 9, 3, 9, −4, 7, 11, 4, −7, 3, 12, 9, −1
	2, 1, −46	+	+				σ	2, 9, −6, 9, 2
	−2, 1, 46	−	−				σc	−2, 9, 6, 9, −2
94	1, 0, −94	+				+	1	1, 9, −13, 4, 6, 8, −5, 7, 9, 2, −10, 8, 3, 7, −15, 8, 2, 8, −15, 7, 3, 8, −10, 2, 9, 7, −5, 8, 6, 4, −13, 9, 1
	−1, 0, 94	−				−	c	−1, 9, 13, 4, −6, 8, 5, 7, −9, 2, 10, 8, −3, 7, 15, 8, −2, 8, 15, 7, −3, 8, 10, 2, −9, 7, 5, 8, −6, 4, 13, 9, −1
95	1, 0, −95	+	+	+			1	1, 9, −14, 5, 5, 5, −14, 9, 1
	−1, 0, 95	+	−	−			c	−1, 9, 14, 5, −5, 5, 14, 9, −1
	2, 1, −47	−	−	+			c_1	2, 9, −7, 5, 10, 5, −7, 9, 2
	−2, 1, 47	−	+	−			cc_1	−2, 9, 7, 5, −10, 5, 7, 9, −2
96	1, 0, −96	+		+	+		1	1, 9, −15, 6, 4, 6, −15, 9, 1
	−1, 0, 96	−		−	+		c	−1, 9, 15, 6, −4, 6, 15, 9, −1
	3, 0, −32	+		−	−		c_1	3, 9, −5, 6, 12, 6, −5, 9, 3
	−3, 0, 32	−		+	−		cc_1	−3, 9, 5, 6, −12, 6, 5, 9, −3
97	1, 0, −97	+					1	1, 9, −16, 7, 3, 8, −11, 3, 8, 5, −9, 4, 9, 5, −8, 3, 11, 8, −3, 7, 16, 9, −1, 9, 16, 7, −3, 8, 11, 3, −8, 5, 9, 4, −9, 5, 8, 3, −11, 8, 3, 7, −16, 9, 1
	2, 1, −48	+					σ	2, 9, −8, 7, 6, 5, −12, 7, 4, 9, −4, 7, 12, 5, −6, 7, 8, 9, −2, 9, 8, 7, −6, 5, 12, 7, −4, 9, 4, 7, −12, 5, 6, 7, −8, 9, 2
98	1, 0, −98	+				+	1	1, 9, −17, 8, 2, 8, −17, 9, 1
	−1, 0, 98	−				−	c	−1, 9, 17, 8, −2, 8, 17, 9, −1
99	1, 0, −99	+	+	+			1	1, 9, −18, 9, 1
	−2, 1, 49	+	+	+			e^2	−2, 9, 9, 9, −2
	5, 2, −19	−	+	+			e	5, 7, −10, 3, 9, 6, −7, 8, 5
	5, −2, −19	−	+	+			e^3	5, 8, −7, 6, 9, 3, −10, 7, 5
	−1, 0, 99	−	−	−			c	−1, 9, 18, 9, −1
	2, 1, −49	−	−	−			ce^2	2, 9, −9, 9, 2
	−5, 2, 19	+	−	−			ce	−5, 7, 10, 3, −9, 6, 7, 8, −5
	−5, −2, 19	+	−	−			ce^3	−5, 8, 7, 6, −9, 3, 10, 7, −5

Table III des formes quadratiques binaires pour les treize déterminants négatifs irréguliers du premier millier.

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-576	1, 0, 576	+		+	+	1
=	9, 0, 64	+		+	+	e^2
$-1(24)^2$	4, 2, 145	+		+	+	e_1^2
	25, 7, 25	+		+	+	$e^2 e_1^2$
	9, 3, 65	−		+	+	e
	9, −3, 65	−		+	+	e^3
	17, 6, 36	−		+	+	ee_1^2
	17, −6, 36	−		+	+	$e^3 e_1^2$
	13, 3, 45	+		+	−	e_1
	16, 4, 37	+		+	−	$e^2 e_1$
	13, −3, 45	+		+	−	e_1^3
	16, −4, 37	+		+	−	$e^2 e_1^3$
	5, 2, 116	−		+	−	ee_1
	20, −2, 29	−		+	−	$e^3 e_1$
	20, 2, 29	−		+	−	ee_1^3
	5, −2, 116	−		+	−	$e^3 e_1^3$
-580	1, 0, 580	+	+	+		1
=	4, 0, 145	+	+	+		e^2
$-145(2)^2$	5, 0, 116	+	+	+		e_1^2
	20, 0, 29	+	+	+		$e^2 e_1^2$
	8, 2, 73	−	−	+		e
	8, −2, 73	−	−	+		e^3
	17, 7, 37	−	−	+		ee_1^2
	17, −7, 37	−	−	+		$e^3 e_1^2$
	19, 3, 31	+	−	−		e_1
	11, 5, 55	+	−	−		$e^2 e_1$
	19, −3, 31	+	−	−		e_1^3
	11, −5, 55	+	−	−		$e^2 e_1^3$
	23, 8, 28	−	+	−		ee_1
	7, −1, 83	−	+	−		$e^3 e_1$
	7, 1, 83	−	+	−		ee_1^3
	23, −8, 28	−	+	−		$e^3 e_1^3$
-820	1, 0, 820	+	+	+		1
=	5, 0, 164	+	+	+		e^2
$-205(2)^2$	20, 0, 41	+	+	+		e_1^2
	4, 0, 205	+	+	+		$e^2 e_1^2$
	13, 5, 65	−	−	+		e
	13, −5, 65	−	−	+		e^3
	17, −8, 52	−	−	+		ee_1^2
	17, 8, 52	−	−	+		$e^3 e_1^2$
	11, 4, 76	+	−	−		e_1
	19, 4, 44	+	−	−		$e^2 e_1$
	11, −4, 76	+	−	−		e_1^3
	19, −4, 44	+	−	−		$e^2 e_1^3$
	23, −10, 40	−	+	−		ee_1
	8, 2, 103	−	+	−		$e^3 e_1$
	8, −2, 103	−	+	−		ee_1^3
	23, 10, 40	−	+	−		$e^3 e_1^3$

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-884	1, 0, 884	+	+	+		1
=	13, 0, 68	+	+	+		i^4
$-221(2)^2$	4, 0, 221	+	+	+		e^2
	17, 0, 52	+	+	+		$e^2 i^4$
	25, −4, 36	+	+	+		i^2
	25, 4, 36	+	+	+		i^6
	9, 4, 100	+	+	+		$e^2 i^2$
	9, −4, 100	+	+	+		$e^2 i^6$
	5, 1, 177	−	−	+		i
	24, −2, 37	−	−	+		i^5
	20, −4, 45	−	−	+		$e^2 i$
	24, 10, 41	−	−	+		$e^2 i^5$
	24, 2, 37	−	−	+		i^3
	5, −1, 177	−	−	+		i^7
	24, −10, 41	−	−	+		$e^2 i^3$
	20, 4, 45	−	−	+		$e^2 i^7$
	8, 2, 111	−	+	−		e
	15, 4, 60	−	+	−		ei^4
	8, −2, 111	−	+	−		e^3
	15, −4, 60	−	+	−		$e^3 i^4$
	19, −3, 47	−	+	−		ei^2
	15, 1, 59	−	+	−		ei^6
	15, −1, 59	−	+	−		$e^3 i^2$
	19, 3, 47	−	+	−		$e^3 i^6$
	27, −13, 39	+	−	−		ei
	3, 1, 295	+	−	−		ei^5
	23, −6, 40	+	−	−		$e^3 i$
	12, 4, 75	+	−	−		$e^3 i^5$
	12, −4, 75	+	−	−		ei^3
	23, 6, 40	+	−	−		ei^7
	3, −1, 295	+	−	−		$e^3 i^3$
	27, 13, 39	+	−	−		$e^3 i^7$
-900	1, 0, 900	+	+	+		1
=	9, 0, 100	+	+	+		e^2
$-1(30)^2$	4, 0, 225	+	+	+		e_1^2
	25, 0, 36	+	+	+		$e^2 e_1^2$
	9, 3, 101	−	+	+		e
	9, −3, 101	−	+	+		e^3
	29, −12, 36	−	+	+		ee_1^2
	29, 12, 36	−	+	+		$e^3 e_1^2$
	17, 1, 53	−	−	+		e_1
	8, −2, 113	−	−	+		$e^2 e_1$
	17, −1, 53	−	−	+		e_1^3
	8, 2, 113	−	−	+		$e^2 e_1^3$
	13, −6, 72	+	−	+		ee_1
	25, −5, 37	+	−	+		$e^3 e_1$
	25, 5, 37	+	−	+		ee_1^3
	13, 6, 72	+	−	+		$e^3 e_1^3$

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-243	1, 0, 243	+				1
=	7, 3, 36	+				d
$-3(9)^2$	7, −3, 36	+				d^2
	4, 1, 161	+				d_1
	13, −2, 19	+				dd_1
	9, 3, 28	+				$d^2 d_1$
	4, −1, 161	+				d_1^2
	9, −3, 28	+				dd_1^2
	13, 2, 19	+				$d^2 d_1^2$
	2, 1, 122	+	−	−	−	σ
	14, 3, 18	+				σd
	14, −3, 18	+				σd^2
-307	1, 0, 307	+	−	−	−	1
=	7, 1, 44	+				d
$-307(1)^2$	7, −1, 44	+				d^2
	4, 1, 77	+				d_1
	11, −1, 28	+				dd_1
	17, 4, 19	+				$d^2 d_1$
	4, −1, 77	+				d_1^2
	17, −4, 19	+				dd_1^2
	11, 1, 28	+				$d^2 d_1^2$
	2, 1, 154	+	−	−	−	σ
	14, 1, 22	+				σd
	14, −1, 22	+				σd^2
-339	1, 0, 339	+	+			1
=	7, 2, 49	+	+			d
$-339(1)^2$	7, −2, 49	+	+			d^2
	4, 1, 85	+	+			d_1
	15, 6, 25	+	+			dd_1
	13, −5, 28	+	+			$d^2 d_1$
	4, −1, 85	+	+			d_1^2
	13, 5, 28	+	+			dd_1^2
	15, −6, 25	+	+			$d^2 d_1^2$
	3, 0, 113	−	−			c
	20, −9, 21	−	−			cd
	20, 9, 21	−	−			cd^2
	12, −3, 29	−	−			cd_1
	5, 1, 68	−	−			cdd_1
	17, 1, 20	−	−			$cd^2 d_1$
	12, 3, 29	−	−			cd_1^2
	17, −1, 20	−	−			cdd_1^2
	5, −1, 68	−	−			$cd^2 d_1^2$
	2, 1, 170	+	+	−	−	σ
	14, −5, 20	+	+			σd
	14, 5, 26	+	+			σd^2
	6, 3, 58	−	−			σc
	10, 1, 34	−	−			σcd
	10, −1, 34	−	−			σcd^2

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-459	1, 0, 459	+	+			1
=	9, 3, 52	+	+			d
$-51(3)^2$	9, −3, 52	+	+			d^2
	4, 1, 115	+	+			d_1
	19, −4, 25	+	+			dd_1
	13, 3, 36	+	+			$d^2 d_1$
	4, −1, 115	+	+			d_1^2
	13, −3, 36	+	+			dd_1^2
	19, 4, 25	+	+			$d^2 d_1^2$
	17, 0, 27	−	−			c
	20, −9, 27	−	−			cd
	20, 9, 27	−	−			cd^2
	11, 5, 44	−	−			cd_1
	5, 1, 92	−	−			cdd_1
	20, −1, 23	−	−			$cd^2 d_1$
	11, −5, 44	−	−			cd_1^2
	20, 1, 23	−	−			cdd_1^2
	5, −1, 92	−	−			$cd^2 d_1^2$
	2, 1, 230	+	+	−	−	σ
	18, 3, 26	+	+			σd
	18, −3, 26	+	+			σd^2
	22, 5, 22	−	−			σc
	10, 1, 46	−	−			σcd
	10, −1, 46	−	−			σcd^2
-675	1, 0, 675	+	+	−	−	1
=	9, 3, 76	+	+			d
$-3(15)^2$	9, −3, 76	+	+			d^2
	4, 1, 169	+	+			d_1
	25, −10, 31	+	+			dd_1
	19, 3, 36	+	+			$d^2 d_1$
	4, −1, 169	+	+			d_1^2
	19, −3, 36	+	+			dd_1^2
	25, 10, 31	+	+			$d^2 d_1^2$
	25, 0, 27	+	−			c
	27, −9, 28	+	−			cd
	27, 9, 28	+	−			cd^2
	13, 1, 52	+	−			cd_1
	25, 5, 28	+	−			cdd_1
	7, −2, 97	+	−			$cd^2 d_1$
	13, −1, 52	+	−			cd_1^2
	7, 2, 97	+	−			cdd_1^2
	25, −5, 28	+	−			$cd^2 d_1^2$
	2, 1, 338	+	+	−	−	σ
	18, 3, 38	+	+			σd
	18, −3, 38	+	+			σd^2
	26, 1, 26	+	−			σc
	14, −5, 50	+	−			σcd
	14, 5, 50	+	−			σcd^2

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-755	1, 0, 755	+	+			1
=	19, −9, 44	+	+			d
$-755(1)^2$	19, 9, 44	+	+			d^2
	4, 1, 189	+	+			d_1
	21, −8, 39	+	+			dd_1
	11, 2, 69	+	+			$d^2 d_1$
	4, −1, 189	+	+			d_1^2
	11, −2, 69	+	+			dd_1^2
	21, 8, 39	+	+			$d^2 d_1^2$
	5, 0, 151	+	+			e^2
	9, −1, 84	+	+			$e^2 d$
	9, 1, 84	+	+			$e^2 d^2$
	20, 5, 39	+	+			$e^2 d_1$
	29, 12, 31	+	+			$e^2 dd_1$
	21, −1, 36	+	+			$e^2 d^2 d_1$
	20, −5, 39	+	+			$e^2 d_1^2$
	21, 1, 36	+	+			$e^2 dd_1^2$
	29, −12, 31	+	+			$e^2 d^2 d_1^2$
	27, 1, 28	−	−			e
	15, −5, 52	−	−			ed
	3, −1, 252	−	−			ed^2
	7, −1, 108	−	−			ed_1
	23, −2, 33	−	−			edd_1
	12, 5, 65	−	−			$ed^2 d_1$
	28, 13, 33	−	−			ed_1^2
	13, 5, 60	−	−			edd_1^2
	12, −1, 63	−	−			$ed^2 d_1^2$
	27, −1, 28	−	−			e^3
	3, 1, 252	−	−			$e^3 d$
	15, 5, 52	−	−			$e^3 d^2$
	28, −13, 33	−	−			$e^3 d_1$
	12, 1, 63	−	−			$e^3 dd_1$
	13, −5, 60	−	−			$e^3 d^2 d_1$
	7, 1, 108	−	−			$e^3 d_1^2$
	12, −5, 65	−	−			$e^3 dd_1^2$
	23, 2, 33	−	−			$e^3 d^2 d_1^2$
	2, 1, 378	+	+	−	−	σ
	22, 9, 38	+	+	−	−	σd
	22, −9, 38	+	+	−	−	σd^2
	10, 5, 78	+	+	−	−	σe^2
	18, −1, 42	+	+	−	−	$\sigma e^2 d$
	18, 1, 42	+	+	−	−	$\sigma e^2 d^2$
	14, −1, 54	−	−	−	−	σe
	26, 5, 30	−	−	−	−	σed
	6, −1, 126	−	−	−	−	σed^2
	14, 1, 54	−	−	−	−	σe^3
	6, 1, 126	−	−	−	−	$\sigma e^3 d$
	26, −5, 30	−	−	−	−	$\sigma e^3 d^2$

D	Classes	α	β	δ	ε	Cp
-891	1, 0, 891	+	+			1
=	9, 3, 100	+	+			d
$-11(9)^2$	9, −3, 100	+	+			d^2
	4, 1, 223	+	+			d_1
	31, 15, 36	+	+			dd_1
	25, 3, 36	+	+			$d^2 d_1$
	4, −1, 223	+	+			d_1^2
	25, −3, 36	+	+			dd_1^2
	31, −15, 36	+	+			$d^2 d_1^2$
	11, 0, 81	+	−			c
	20, −7, 47	+	−			cd
	20, 7, 47	+	−			cd^2
	23, 11, 44	+	−			cd_1
	20, 3, 45	+	−			cdd_1
	5, 2, 179	+	−			$cd^2 d_1$
	23, −11, 44	+	−			cd_1^2
	5, −2, 179	+	−			cdd_1^2
	20, −3, 45	+	−			$cd^2 d_1^2$
	2, 1, 446	+	+	−	−	σ
	18, 3, 50	+	+	−	−	σd
	18, −3, 50	+	+	−	−	σd^2
	22, 11, 46	+	+	−	−	σc
	10, 3, 90	+	+	−	−	σcd
	10, −3, 90	+	+	−	−	σcd^2
-974	1, 0, 974	+			+	1
=	18, −4, 55	+			+	d
$-2.487(1)^2$	18, 4, 55	+			+	d^2
	31, 7, 33	+			+	d_1
	30, −14, 39	+			+	dd_1
	15, −4, 66	+			+	$d^2 d_1$
	31, −7, 33	+			+	d_1^2
	15, 4, 66	+			+	dd_1^2
	30, 14, 39	+			+	$d^2 d_1^2$
	2, 0, 487	+			+	e
	9, −4, 110	+			+	$e^2 d$
	9, 4, 110	+			+	$e^2 d^2$
	25, −1, 39	+			+	$e^2 d_1$
	15, 1, 65	+			+	$e^2 dd_1$
	30, −4, 33	+			+	$e^2 d^2 d_1$
	25, 1, 39	+			+	$e^2 d_1^2$
	30, 4, 33	+			+	$e^2 dd_1^2$
	15, −1, 65	+			+	$e^2 d^2 d_1^2$
	27, 5, 37	−			−	e
	3, 1, 325	−			−	ed
	6, 2, 163	−			−	ed^2
	5, 1, 195	−			−	ed_1
	11, 4, 90	−			−	edd_1
	13, 1, 75	−			−	$ed^2 d_1$
	10, 4, 99	−			−	ed_1^2
	26, 12, 43	−			−	edd_1^2
	22, 4, 45	−			−	$ed^2 d_1^2$
	27, −5, 37	−			−	e^3
	6, −2, 163	−			−	$e^3 d$
	3, −1, 325	−			−	$e^3 d^2$
	10, −4, 99	−			−	$e^3 d_1$
	22, −4, 45	−			−	$e^3 dd_1$
	26, −12, 43	−			−	$e^3 d^2 d_1$
	5, −1, 195	−			−	$e^3 d_1^2$
	13, −1, 75	−			−	$e^3 dd_1^2$
	11, −4, 90	−			−	$e^3 d^2 d_1^2$

Note sur l'élimination.

(Par M. *A Cayley.*)

Soient $U=(a,\ldots)(x,y)^m$, $V=(b,\ldots)(x,y)^n$ des fonctions homogènes quelconques des degrés m et n respectivement. Dénotons par $(x,y)^\varphi$ la suite entière ou seulement une partie de la suite de termes x^φ, $x^{\varphi-1}y$, $\ldots$ y^φ, et en prenant $\theta \geqq m \geqq n$, formons le déterminant

$$\{(x,y)^{\theta-m}U,\ (x,y)^{\theta-n}V\}.$$

Cette notation signifie qu'en supposant les suites $(x,y)^{\theta-m}U$, $(x,y)^{\theta-n}V$ composées respectivement de p et de q termes et posant $p+q=s$ on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} (x_1,y_1)^{\theta-m}U_1, & (x_1,y_1)^{\theta-n}V_1 \\ \vdots & \vdots \\ (x_s,y_s)^{\theta-m}U_s, & (x_s,y_s)^{\theta-n}V_s \end{vmatrix}$$

dans lequel les différentes lignes (chacune composée de s termes) sont ce que devient $(x,y)^{\theta-m}U$, $(x,y)^{\theta-n}V$, lorsqu'on y substitue (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots$ (x_s,y_s) successivement au lieu de (x,y).

Le déterminant que je viens définir est divisible par le déterminant

$$\{(x,y)^{s-1}\},$$

notation qui est équivalente à:

$$\begin{vmatrix} (x_1,\ y_1)^{s-1} \\ \vdots \\ (x_s,\ y_s)^{s-1} \end{vmatrix}$$

et dans laquelle $(x,y)^{s-1}$ dénote la suite entière des termes x^{s-1}, $x^{s-2}y$, $\ldots$ y^{s-1}. Nous obtenons ainsi une équation

$$\frac{\{(x,y)^{\theta-m}U,\ (x,y)^{\theta-n}V\}}{\{(x,y)^{s-1}\}} = (a,\ldots)^p(b,\ldots)^q(x_1,y_1)^{\theta-s+1}\ \ldots\ (x_s,y_s)^{\theta-s+1},$$

c. à d. que le quotient est du degré p par rapport aux coefficients $(a,\ldots)$ du degré q par rapport aux coefficients $(b,\ldots)$ et du degré $\theta-s+1$ par rapport à chaque système de variables (x_1,y_1), $\ldots$ (x_s,y_s). Or en supposant $U_1=0$, $V_1=0$, on obtient

$$0 = (a,\ldots)^p(b,\ldots)^q(x_1,y_1)^{\theta-s+1}\ \ldots(x_s,y_s)^{\theta-s+1},$$

équation qui subsiste quelles que soient les valeurs des variables $(x_2,y_2)\ldots(x_s,y_s)$; cela donne une suite de $(\theta-s+2)^{s-1}$ équations chacune de la forme

$$0 = (a,\ldots)^p(b,\ldots)^q(x_1,y_1)^{\theta-s+1}.$$

En considérant un système quelconque de $\theta-s+2$ de ces équations, pour en

éliminer tous les termes de $(x_1, y_1)^{\theta-s+1}$, on obtiendra ou l'équation identique $0=0$, ou une équation de la forme

$$F = (a, \ldots)^{p(\theta-s+2)}(b, \ldots)^{q(\theta-s+2)} = 0$$

où F sera un déterminant de l'ordre $\theta-s+2$, chaque terme étant de la forme $(a, \ldots)^p(b, \ldots)^q$.

Cela posé il est évident que F contiendra comme facteur la fonction

$$\square = (a, \ldots)^n(b, \ldots)^m$$

qui est le résultant des deux équations $U=0$, $V=0$. En particulier, on aura les deux cas que voici:

1°. Soit $\theta = m+n-1$, et supposons que $(x, y)^{n-1}U$, $(x, y)^{m-1}V$, dénotent les suites entières

$$x^{n-1}U,\ x^{n-2}yU,\ \ldots\ y^{n-1}U;\quad x^{m-1}V,\ x^{m-2}yV,\ \ldots\ y^{m-1}V,$$

nous aurons $p=n$, $q=m$, $s=m+n$, $\theta-s+2=1$, et delà

$$F = (a, \ldots)^n(b, \ldots)^m,$$

donc $F=\square$. On voit sans peine que l'on obtient de cette manière le résultant $\square$, sous la forme d'un déterminant de l'ordre $m+n$, le même que l'on obtient en éliminant les termes de $(x, y)^{m+n-1}$ entre les équations $(x, y)^{n-1}U=0$, $(x, y)^{m-1}V=0$.

2°. En supposant $m \gtreqless n$, on peut prendre $\theta=m$, ce qui donne pour $(x, y)^{\theta-m}U$ le seul terme U. Réduisons aussi $(x, y)^{\theta-n}V$ au seul terme $x^\alpha y^{m-n-\alpha}V$ (α désignant un nombre entier arbitraire entre 0 et $m-n$) c. à. d. au terme $x^{m-n}V$ ou $y^{m-n}V$ dans le cas des deux valeurs extrêmes de α. On a ainsi $p=1$, $q=1$, $s=2$, et delà

$$F = (a, \ldots)^m(b, \ldots)^n.$$

Donc $F=(a, \ldots)^{m-n}\square$, c. à. d. que l'on obtient le résultant $\square$ affecté d'un facteur $(a, \ldots)^{m-n}$ qui ne contient que les coefficients de U, et qui est de l'ordre $m-n$ par rapport à ces coefficients. L'expression de ce facteur peut être trouvée assez facilement. Dans le cas du terme $x^{m-n}V$, c. à. d. pour $\alpha=m-n$, le facteur sera k^{m-n} (k désignant le dernier coefficient de la suite $(a, \ldots)$) et dans le cas du terme $y^{m-n}V$, c. à. d. pour $\alpha=0$, le facteur sera a^{m-n}. Mais en supposant $m=n$ on a tout simplement $F=\square$, c. à. d. que l'on obtient le résultant sans facteur étranger. C'est sous cette dernière forme que j'ai présenté la méthode abregée de *Bezout* dans le tome LIII, p. 366 (1857) de ce Journal.

Londres, 17ième décembre 1861.

Ueber die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus.

(Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg i. B.)

Die Constante des Integrallogarithmus und der harmonischen Reihe hat bekanntlich denselben Werth. Dennoch werden hierfür von *Mascheroni*, *Gauss*, *Soldner* u. A. verschiedene Werthe angegeben. *Euler* (Act. Acad. Scient. Petrop. p. A. 1781 P. II, pg. 45 et sqq.) giebt folgenden an

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,5325,$$

Mascheroni (Adnott. ad *Euleri* calc. integr., welches Werk mir aber nicht zugänglich ist, weswegen ich auf *Lacroix* Traité d. calc. diff. et int. T. III, Pg. 521 und auf *Bessels* Aufsatz (Königsberger Archiv S. 4) verweise)

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,618\,112\,090\,082\,39,$$

Soldner (Théor. d'une nouv. fonct. transc. Munic. 1809, pg. 13)

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,6065,$$

Gauss (Comm. soc. reg. Scient. Gott. rec. V. II ad. A. 1811—13 T. II, p. 36)

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,53.$$

Ausserdem findet sich dort folgender, auf seine Aufforderung von *Fr. B. G. Nicolai* doppelt berechneter Werth

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,0421.$$

Bretschneider giebt in diesem Journal Bd. 17, S. 260 den von *Mascheroni* mitgetheilten Werth mit der Bemerkung an, dass er von *Kramp* aufgefunden sei, ohne den Ort, wo er sich findet, zu bezeichnen.

Euler, *Soldner* und *Gauss* haben den Werth aus der Summe der 10 ersten Glieder der harmonischen Reihe berechnet, *Mascheroni* aus den 100 ersten, *Nicolai* doppelt aus den 50 und 100 ersten Gliedern. Die Gleichung, welche zur Rechnung dient, ist bekanntlich

$$(1.)\quad C = S_n - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4.n^4} + \frac{B_3}{6.n^6} - \frac{B_4}{8.n^8} + \cdots,$$

wenn $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ und B_1, B_2, B_n ... die *Bernoulli*schen Zahlen bezeichnen.

Die Werthberechnung ist mit grosser Mühe verbunden, weil man die Summe der ersten 100 Glieder der harmonischen Reihe darzustellen hat, um mit Sicherheit eine Entscheidung geben zu können. Die Arbeit lässt sich jedoch nach folgender Methode sehr abkürzen.

Bezeichnet man die Summe der n ersten ungeraden Glieder der harmonischen Reihe durch

$$S_{1,2n-1} = 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

und die der n ersten geraden durch $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$, so hat man folgende Beziehungen

$$(2.)\quad S_{2n} = S_{1,2n-1}+\tfrac{1}{2}S_n \quad \text{und} \quad (3.)\quad S_{2n+1} = S_{1,2n+1}+\tfrac{1}{2}S_n.$$

Nach diesen Gleichungen reducirt sich die Summirung der 100 ersten Glieder der Reihe nahe zu auf die Hälfte der Arbeit. Man kann nämlich von den sechs ersten Gliedern (S_6) und den 6 ersten ungeraden ($S_{1,11}$) auf S_{12}, hierauf nach N°. 3 auf S_{25}, und dann nach N°. 2 auf S_{50} und S_{100} übergehen. Die Rechnung wird dadurch erleichtert, dass nur wenige Glieder auf Decimalbrüche von sehr grossen Perioden führen.

Da bisher die Summen, worauf die Glieder der harmonischen Reihe führen, mit Ausnahme von S_{10}, so viel mir bekannt, nicht mitgetheilt sind, so sollen folgende, auf 42 Stellen berechnet, hier stehen, wodurch Gelegenheit geboten ist, die Richtigkeit der von mir gefundenen Resultate mit geringer Mühe nach N°. 1 prüfen zu können

$$(4.)\quad \begin{cases} S_{10} = 2,928\,968\,253\,968\,253\ldots, \\ S_{20} = 3,597\,739\,657\,143\,681\,911\,483\,769\,068\,908\,387\,793\,836\,711, \\ S_{25} = 3,815\,958\,177\,753\,506\,869\,134\,813\,676\,474\,734\,490\,618\,190, \\ S_{50} = 4,499\,205\,338\,329\,425\,057\,560\,471\,792\,964\,769\,091\,970\,601, \\ S_{100} = 5,187\,377\,517\,639\,620\,260\,805\,117\,675\,658\,253\,157\,908\,971. \end{cases}$$

Hieraus habe ich nach N°. 1 folgende Werthe durch die Summe der 10, 20, 50 und 100 ersten Glieder der Reihe gefunden

$$(5.)\quad \begin{cases} C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,581 \\ C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,083 \\ C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,419 \\ C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,155. \end{cases}$$

Der erste Werth ist auf 18, der zweite auf 25, der dritte auf 34, der letzte auf 40 Stellen richtig. Die vorliegenden Werthe stimmen bei vierfacher Rechnung unter sich und mit den von *Gauss, Soldner* und *Nicolai* berechneten überein. Hiervon weicht der von *Mascheroni, Bessel, Lacroix* und der in diesem Journal angegebene in der 20—22 Stelle ab. Er ist daher wohl als unrichtig zu bezeichnen.

Freiburg, im October 1861.

Ueber die Identität der Prismatoide mit den Trapezoidalkörpern.

(Von Herrn *E. F. August.*)

Im 45ten Bande dieses Journals (1853) pag. 239 habe ich die Ausmessung der Körperstumpfe nach der Formel $\frac{1}{6}(4M+G+K)$ behandelt, und zugleich theils auf das Programm des Cölnischen Real-Gymnasiums von 1849, in welchem diese meine Entwickelungen schon enthalten waren, theils auf den seitdem erschienenen dritten Cursus meines Lehrbuchs der Mathematik (Berlin bei Georg Reimer 1854) hingewiesen, worin die elementare weitere Ausführung sich findet. Ich nannte im Allgemeinen jeden Körper einen Körperstumpf, der aus einem anderen Körper herausgeschnitten ist durch zwei Parallelebenen, die keinen Eckpunkt desselben zwischen sich haben. Bei ebenflächig begrenzten Körpern wurden diese Ausschnitte, selbständig betrachtet, von mir *Trapezoidalkörper* genannt und die Ausmessung derselben auf die Ausmessung *stehender, hangender* und *schwebender* Pyramiden zurückgeführt, aus denen alle solche Körper zusammengesetzt sind, wodurch sich die Allgemeingültigkeit der obigen Formel für die Grundflächen G und K, für den Mittelschnitt M und die Höhe h sehr einfach ergab. Ich habe ferner die Ausdehnung der Formel auf die Kugel und sämmtliche Umdrehungskörper der Kegelschnitte ganz *elementar* nachgewiesen. Die Arbeiten meiner Vorgänger in diesen Untersuchungen habe ich gewissenhaft angegeben und die Wichtigkeit des Satzes für die Elementarmathematik mit dem Wunsche herausgehoben, dass er in die Lehrbücher übergehen möchte, wie ich ihn in das meinige aufgenommen. Nun hat Herr Professor Dr. *Theodor Wittstein* im Jahre 1860 eine Monographie herausgegeben (Das *Prismatoid*, eine Erweiterung der elementaren Stereometrie, Hannover 1860.), in welcher er den Körperstumpf, den ich *Trapezoidalkörper* genannt hatte, als *Prismatoid* in die Elementarstereometrie einführt und, wie er meint, als etwas *ganz Neues*. Recensenten, die eben so wenig, wie er selbst, die Vorarbeiten kannten, haben dies ihm bestätigt und in dem in diesem Jahre erschienenen Lehrbuche der Elementar-Mathematik (Hannover 1862. Zweiter Band.) spricht sich Herr *Wittstein* in

demselben Sinne aus, obwohl er Einiges über die früheren Bearbeiter des Satzes, jedoch mit Uebergehung meiner Arbeit, in der Vorrede erwähnt. Ich muss es den Mathematikern, die mein Lehrbuch in dieser Beziehung mit dem seinigen vergleichen, anheim geben, zu beurtheilen, wessen Beweisführung die einfachere ist und wer zugleich den Gegenstand am Erschöpfendsten behandelt hat. Dass aber in meinem Lehrbuche der Satz *zuerst* als stereometrisches Element enthalten ist, darf ich wohl mit Sicherheit behaupten. Ich glaubte der Sache und meinen geringen Bemühungen um dieselbe, auch diesem Journal, das meine Abhandlung veröffentlicht hat, diese Erklärung schuldig zu sein.

Berlin, im Februar 1862.

Zur Lebensgeschichte des Mathematikers *Ludwig Immanuel Magnus.*

Das Jahr 1861 hat aus der Reihe der hiesigen Mathematiker in *Ludwig Immanuel Magnus* einen Mann durch den Tod ausscheiden sehen, dessen nützliches Wirken für die Wissenschaft und deren Unterricht vornehmlich im Bereich der analytischen Geometrie den Fachgenossen bekannt ist. Weniger bekannt ist es, dass derselbe sich unter den grössten äusseren Hindernissen zu einer Zeit, wo die mathematischen Studien in Berlin völlig darnieder lagen, fast ohne alle fremde Hülfe durch eigene Kraft zum Gelehrten gebildet hat.

Die nachfolgenden Zeilen, welche die Redaction befreundeter Hand verdankt, geben in dieser Beziehung sowie überhaupt für die Lebensverhältnisse des Verstorbenen einige Anhaltspunkte:

Ludwig Immanuel Magnus wurde am 15ten März 1790 zu Berlin geboren. Nachdem er früh seinen Vater verloren hatte, wählte er, dem Willen seiner Mutter gemäss, den kaufmännischen Beruf. Auf der damaligen Handelsschule zu Berlin vorbereitet, trat er sehr jung in das Handlungshaus seines Oheims. Die ihm daselbst obliegenden Arbeiten nahmen ihn so sehr in Anspruch, dass er häufig die Nächte zu Hülfe nehmen musste, und dennoch liess ihn sein Drang zur Mathematik auch unter diesen Verhältissen Zeit finden, den *Euclid* gründlich zu studiren.

Als im Jahr 1813 die preussische Jugend zu den Waffen eilte, trat er als Freiwilliger zu Breslau in die Artillerie ein und wurde von dort bald nach Neisse gesandt und zum Feuerwerker befördert.

Nach dem Frieden fand er in einem anderen Berliner Bankhause eine für sein wissenschaftliches Streben günstigere Stellung, welche ihm gestattete, in seiner freien Zeit an das Studium der höheren Theile der Mathematik zu gehen, wobei er sich — mit Ausnahme *eines* Versuchs, einen Cursus der Infinitesimalrechnung bei dem damaligen Gymnasial-Professor *Lubbe* durchzumachen — lediglich auf Selbststudium beschränkte.

Um jene Zeit kam er in enge Berührung mit einer Genossenschaft von jungen Männern, die, durch *Fichte* begeistert, sich mit grosser Selbstverläugnung der Volkserziehung widmeten und im Jahre 1816 die *Cauer*sche

Erziehungs-Anstalt in Berlin gründeten. In dieser Anstalt fing *Magnus* an während seiner Freistunden mathematischen Unterricht zu ertheilen, in welchem sich eigene Klarheit und Begabung für das Lehren in gleichem Masse bekundeten. Zugleich folgte er eifrig der Entwicklung der Wissenschaft und, indem er in den ausgezeichneten Leistungen des damals einzigen mathematischen Journals von *Gergonne* eine lebhafte Anregung fand, begann er sich in selbstständigen Arbeiten zu versuchen, wovon ein Aufsatz vom Jahr 1820: *Solution d'un problème de géométrie par M. M....s* in den *Gergonne*'schen Annalen tome 11 und zwei schöne Abhandlungen vom Jahr 1825: *Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe, sur le cone du second ordre et sur les coniques sphériques* und *Démonstration de quelques théorèmes sur les enveloppes* *) in denselben Annalen tome 16 Zeugniss geben.

Bei der im Jahre 1826 erfolgenden Verlegung der *Cauer*schen Anstalt von Berlin nach Charlottenburg trat *Magnus* in aller Form in das Lehrer-Collegium der Anstalt ein und fand auf diese Weise endlich die gewünschte Gelegenheit, seine kaufmännische Beschäftigung gänzlich aufzugeben. Die acht Jahre, während welcher er in dieser Stellung blieb, sind die einzigen seines Lebens gewesen, die ihm eine ungestörte wissenschaftliche Thätigkeit gestatteten. Er konnte nun umfassendere und zusammenhangende Untersuchungen anstellen und legte die Früchte seiner Studien theils in einzelnen Abhandlungen in diesem Journal nieder, theils in seiner bekannten und verbreiteten „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie". Diese Schrift, von welcher der erste Theil, die Geometrie der Ebene umfassend, 1833 erschien und welche später Veranlassung gab, dass die philosophische Facultät der Universität Bonn *Magnus* zu ihrem Ehrendoctor ernannte, ist ein Werk, welches, über den einfachen Titel einer Aufgabensammlung weit hinausgehend, auch werthvolle eigene Arbeiten enthält und in welchem die Darstellung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften besonders hervorzuheben ist. — Die beiden letzten Jahre dieses Lebensabschnitts brachten überdies für *Magnus* die Befriedigung mit sich, dass er mit

---

*) Diese Abhandlung zog die Aufmerksamkeit *Jacobi*s auf sich, der damals eben seine Doctor-Dissertation *de fractionibus simplicibus* herausgegeben und als Docent der Mathematik in Königsberg seine Laufbahn begonnen hatte; es existirt von ihm ein bis jetzt ungedruckt gebliebener Aufsatz, worin er, die Methoden der Variationsrechnung zu Hülfe nehmend, die *Magnus*schen Ergebnisse und eben dahin gehörende von *Carl Dupin* in dessen *applications de géométrie* etc. bekannt gemachte zu grosser Allgemeinheit erweitert. *B.*

einem in demselben Bereich der analytischen Geometrie erfolgreich arbeitenden Mathematiker, dem in den Jahren 1833 und 34 hier lebenden Professor *Plücker* in persönlichen wissenschaftlichen Verkehr treten konnte.

Aber schon 1834 endete für *Magnus* seine bisherige günstige Lage. In diesem Jahre starb plötzlich sein Freund *Cauer* und mit diesem Tode traten so wesentliche Veränderungen in der Organisation der Erziehungsanstalt ein, dass *Magnus* sich nach einem anderen Wirkungskreise umsah. Es war natürlich zu wünschen, ihn in seiner wissenschaftlichen Laufbahn fortwirken zu sehen, auch wurde ihm eine Stellung an einem öffentlichen Institut in Aussicht gestellt, um welche er jedoch nicht glaubte sich bewerben zu sollen. In seiner bis an Schüchternheit grenzenden Bescheidenheit besass er nicht die Gabe, seine Leistungen zu äusserer Geltung zu bringen. Auch setzte er in seine körperliche Kraft das Vertrauen, dass er noch jetzt, wie in jüngeren Jahren in der Wissenschaft etwas würde leisten können, selbst wenn er ihr nur seine Musse zuzuwenden im Stande wäre. — Und so trat er, ohne je ein Wort der Klage laut werden zu lassen, bei dem damals neuentstandenen Berliner Kassenverein als oberster Kassenbeamter ein.

Leider hatte er die Stärke seiner Gesundheit überschätzt. Die angespannte Thätigkeit des Kassirers in einem grossen Bank-Institut erschöpfte ihn in hohem Grade, und er musste seine letzten Kräfte zusammenraffen, um gleichzeitig von dem zweiten für die analytische Geometrie des Raumes bestimmten Theil seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen etc.“ auch nur die erste Abtheilung im Jahre 1837 erscheinen lassen zu können. Diese Abtheilung seines Werkes, zu welcher er die Materialien längst gesammelt hatte und worin wiederum auf die Darstellung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften der grösste Nachdruck gelegt wird, ist — abgesehen von einer kurzen Bemerkung im 26ten Bande dieses Journals — die letzte von *Magnus* veröffentlichte Arbeit. Die zweite Abtheilung des zweiten Theils, welche die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie des Raumes enthalten sollte, ist er nicht mehr im Stande gewesen erscheinen zu lassen. Als er nach 9jähriger Anstrengung im Jahre 1843 in die Lage kam, seine Stellung als Kassenbeamter aufgeben zu können, hatten seine Kräfte bereits sehr abgenommen, es kam eine Schwächung des Augenlichts hinzu, die es ihm unmöglich machte, die volle Musse, die ihm nun zu Theil ward, wissenschaftlich zu verwerthen. Er starb am 25ten September 1861.

Inhaltsverzeichniss der Bände 51 bis 60.

Aoust zu Marseille.

	Band	Seite
Des coordonnées curvilignes se coupant sous un angle quelconque. .	58.	352—368

Arndt.

Zur Theorie der binären cubischen Formen.	53.	309—321
Auflösung einer Aufgabe in der Composition der quadratischen Formen.	56.	64— 71
Ueber die Anzahl der Genera der quadratischen Formen.	56.	72— 78
Bemerkung zu den Formeln von *Dirichlet*, durch welche die Klassenzahl bei positiver Determinante ausgedrückt wird.	56.	100
Einfacher Beweis für die Irreductibilität einer Gleichung in der Kreistheilung.	56.	178—181

Aronhold.

Bemerkung über die Auflösung der biquadratischen Gleichungen. . .	52.	95— 96
Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen.	55.	97—191

August.

Ueber die Identität der Prismatoide mit den Trapezoidalkörpern. . .	60.	377—378

Baltzer zu Dresden.

Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren und die Aehnlichkeit derselben.	52.	142—151
Ueber eine Reihe von Sätzen, die Durchschnitte von Cylindern und Kegeln durch Kugeln betreffend.	54.	162—169

Bauer zu München.

Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variablen.	56.	101—121
Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte.	57.	256—272
Von einigen Summen und Differenzenformeln und den *Bernoulli*schen Zahlen.	58.	292—300

Betti zu Pisa.

Sur les fonctions symétriques des racines des équations.	54.	98—100

Biernatzki.

	Band	Seite
Die Arithmetik der Chinesen.	52.	59 — 94

Bischoff zu München.

Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven.	56.	166 — 177
Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fläche m^{ter} Ordnung doppelt umschrieben ist.	57.	278 — 280
Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven.	58.	179 — 180
Zur Lehre von den Raumcurven und Flächen.	59.	394 — 396

Bjerkness zu Christiania.

Sur une certaine classe de courbes de troisième degré, rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés.	55.	310 — 334

Borchardt.

Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function.	53.	193 — 198
Bemerkung über einen algebraischen Fundamentalsatz bei Gelegenheit eines Briefes des Herrn *Hermite* und eines nachgelassenen *Jacobi*schen Aufsatzes. Band 53, pg. 271 — 280.	53.	281 — 283
Remarque relative à la note „sur la méthode d'élimination de *Bézout*“.	53.	367 — 368
Bemerkung zu „*Spitzer*, über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“.	57.	81
Zum Gedächtniss *Gustav Lejeune Dirichlets*.	57.	91 — 92
Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante.	57.	111 — 121
Vergleichung zweier Formen der Eliminations-Resultante.	57.	183 — 186
Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel.	58.	127 — 136
Ueber Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. . . .	58.	270 — 272

Brioschi zu Pavia.

Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair; et sur les déterminants binaires.	52.	133 — 141
Sur une nouvelle proprieté du résultant de deux équations algébriques.	53.	372 — 376
Sur une formule de M. *Cayley*.	53.	377 — 378
Sur l'integration des équations ultra-elliptiques.	55.	56 — 60
Développements relatifs au §. 3 des Recherches de *Dirichlet* sur un problème d'Hydrodynamique, vol. 58, pag. 181.	59.	63 — 73

Faà de Bruno zu Turin.

Note sur un théorème de M. *Brioschi*.	54.	283 — 284

Cayley zu London.

Note sur une formule pour la réversion des séries.	52.	276 — 284
Note sur la méthode d'élimination de *Bézout*.	53.	366
Note sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod 8$.	53.	369 — 371
Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires.	54.	48 — 58

	Band	Seite
Deuxième note sur une formule pour la réversion des séries. . . .	54.	156—161
Addition au mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. .	54.	292
Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques.	55.	15— 24
Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité.	55.	192
Théorème sur les déterminants gauches.	55.	277—278
Note sur les normales d'une conique.	56.	182—185
Addition à la note sur la composition du nombre 47 etc. Bd. 55, pg. 192.	56.	186—187
Sur l'invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire et sur le résultant de trois fonctions quadratiques ternaires.	57.	139—148
Démonstration d'un théorème de *Jacobi* par rapport au problème de *Pfaff*.	57.	273—277
Note sur la transformation de *Tschirnhausen*.	58.	259—262
Deuxième note sur la transformation de *Tschirnhausen*.	58.	263—269
Tables des formes quadratiques binaires pour les déterminants négatifs $D=-1$ jusqu'à $D=-100$, pour les déterminants positifs non carrés depuis $D=2$ jusqu'à $D=99$ et pour les treize déterminants négatifs irréguliers qui se trouvent dans le premier millier.	60.	357—372
Note sur l'élimination.	60.	373—374

Clebsch zu Carlsruhe.

Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit. .	52.	103—132
Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit. .	53.	287—294
Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes.	53.	292—308
Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen.	54.	293—312
Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. .	55.	254—273
Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten.	55.	335—355
Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen.	56.	1— 10
Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale.	56.	122—148
Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt.	57.	73— 77
Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens.	57.	93—110
Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper.	57.	149—169
Theorie der circularpolarisirenden Medien.	57.	319—358
Zur Theorie der algebraischen Flächen.	58.	93—108
Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen.	58.	109—126
Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung.	58.	229—239
Ueber eine Klasse von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren.	58.	273—291
Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.	59.	1— 62
Ueber Curven vierter Ordnung.	59.	125—145
Ueber *Jacobi*s Methode, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren, und ihre Ausdehnung auf das *Pfaff*sche Problem.	59.	190—192
Ueber die Knotenpunkte der *Hesse*schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung.	59.	193—228
Ueber das *Pfaff*sche Problem.	60.	193—251
Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen.	60.	343—350

Cohn.

Ueber confocale Kegelschnitte.	54.	329—343

Christoffel.

	Band	Seite
Ueber die *Gauss*sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.	55.	61 — 82
Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.	55.	281 — 299
Zur Abhandlung „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen“ Bd. 57, p. 231.	58.	90 — 92

Crelle.

Wie eine Tafel des untheilbaren Factoren der Zahlen bis zu beliebiger Höhe möglichst leicht und sicher aufzustellen sei.	51.	61 — 99
Einige Aufgaben	51.	100 — 102
Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhalts eines Kugelausschnitts zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen.	52.	175 — 192

Cremona zu Bologna.

Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.	58.	138 — 151
Notes sur les cubiques gauches.	60.	188 — 192
Sur les surfaces gauches du troisième degré.	60.	313 — 320

Dedekind zu Zürich.

Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.	54.	1 — 26
Beweis für die Irreductibilität der Kreistheilungs-Gleichungen.	54.	27 — 30
Zusatz zu „*Dirichlet*, über ein Problem der Hydrodynamik“.	58.	217 — 228

Dietrich zu München.

Ueber eine Reihentransformation *Stirlings*.	59.	163 — 172

Dirichlet.

Gedächtnissrede auf *Carl Gustav Jacob Jacobi*.	52.	193 — 217
Ueber eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante.	53.	127 — 129
Sur un théorème relatif aux séries.	53.	130 — 132
Ueber den biquadratischen Charakter der Zahl „Zwei“.	57.	187 — 188
Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.	58.	181 — 216

Fuchs.

Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$	58.	80 — 89

Grassmann zu Stettin.

Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung.	52.	254 — 275

Grossmann zu Schweidnitz.

	Band	Seite
Ueber eine neue Eigenschaft der *Steiner*schen Gegenpunkte des *Pascal*-schen Sechsecks.	58.	174—178

Härtenberger zu Feldkirch in Vorarlberg.

Ueber die Erzeugung geometrischer Curven.	58.	54— 79

Heilermann zu Coblenz.

Ueber die Focalpunkte der Flächen zweiten Grades.	56.	345—364
Beitrag zu den Sätzen über die einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise.	56.	365—375

Heine zu Halle.

Der Uebergang von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen. .	51.	382—401
Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form. . .	53.	199—230
Ueber Kettenbrüche. Schreiben an den Herausgeber.	53.	284—285
Bemerkungen zu *Jacobi*s Abhandlung über Variationsrechnung. . . .	54.	68— 71
Lagranges Umkehrungsformel.	54.	388
Ueber die binomische Reihe.	55.	279—280
Ueber die *Laméschen* Functionen. Schreiben an den Herausgeber. . .	56.	79— 86
Einige Eigenschaften der *Laméschen* Functionen.	56.	87— 99
Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen.	57.	231—247
Die *Laméschen* Functionen verschiedener Ordnungen.	60.	252—303

Helmholtz zu Heidelberg.

Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbel-bewegungen entsprechen.	55.	25— 55
Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. . . .	57.	1— 72

Hermes.

Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren.	56.	204—217
Ueber homologe Tetraeder.	56.	218—246
Das Fünfflach und Fünfeck im Raume entsprechend dem Vierseit und Viereck in der Ebene.	56.	247—262

Hermite zu Paris.

Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminés, deux mémoires.	52.	1— 38
Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites donnés.	52.	39— 51
Sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés.	53.	182—192
Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré.	53.	271—274
Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires.	57.	371—375
Sur l'invariant du 18e ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré.	59.	304—305
Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. . .	60.	304

Hesse zu Heidelberg.

	Band	Seite
Transformation der Gleichung der Curven 14ten Grades, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden.	52.	97—102
Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.	54.	227—273
Zu den Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung.	55.	83— 88
Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen.	56.	263—269
Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variablen enthalten.	57.	175—182
Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten.	60.	305—312

Hoppe.

Zur Theorie der parallelen Curven.	55.	95— 96
Bemerkung zu der Abhandlung Bd. 58, pg. 80, über die Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$.	58.	369—373
Ueber die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve und deren inverse Linie.	58.	374—377
Ueber die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion.	60.	182—187

C. G. J. Jacobi.

Ueber Reihenentwickelungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niederen Grades haben.	53.	103—126
Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variabeln-Systemen linearen und homogenen Ausdruckes.	53.	266—270
Ueber einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen.	53.	275—280
Solution nouvelle d'un problème fondamental de géodésie.	53.	335—341
Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen.	54.	82— 97
Ueber die Substitution $(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$ und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform.	55.	1— 14
Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.	56.	149—165
Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben.	59.	74— 88
Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.	60.	1—181

Joachimsthal.

De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt.	53.	149—172
Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes.	54.	181—192

	Band	Seite
Bemerkung zu „*Schröter,* über die Raumcurven dritter Klasse und Ordnung.“	56.	44 — 45
Ueber ein elementares Theorem der analytischen Geometrie.	56.	280 — 284
Ueber ein Attractionsproblem.	58.	135 — 137
Ueber die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können.	59.	111 — 124

de Jonquières zu Paris.

Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes.	59.	313 — 334

Kinkelin zu Bern.

Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung.	57.	122 — 138

Kirchhoff zu Heidelberg.

Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.	56.	285 — 313
Ueber die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln.	59.	89 — 110

Kronecker.

Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.	53.	173 — 175
Ueber complexe Einheiten.	53.	176 — 181
Ueber cubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten.	56.	188
Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante.	57.	248 — 255
Ueber die Gleichungen fünften Grades.	59.	306 — 310
Ueber die Bedingungen der Integrabilität.	59.	311 — 312

Küpper zu Trier.

Démonstration de cette proposition, que toute fonction elliptique de première espèce peut être remplacée par deux fonctions elliptiques de seconde espèce, et développement d'une formule relative à la rectification de l'hyperbole.	55.	89 — 93

Kummer.

Ueber die den *Gaussis*chen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln.	53.	142 — 148
Anzeige einer Schrift des Herrn *Reuschle* in Stuttgart.	53.	379
Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen.	56.	270 — 279
Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme.	57.	189 — 230

Lipschitz zu Bonn.

Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.	53.	238 — 259
Zur Theorie der quadratischen Formen.	54.	193 — 196
Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe.	54.	313 — 328

	Band	Seite
Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die *Euler*sche Summenformel.	56.	11 — 26
Ueber ein Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial I}{\partial x} + I = 0$. .	56.	189 — 196
Beiträge zur Theorie der Vertheilung der statischen und dynamischen Electricität in leitenden Körpern.	58.	1 — 53
Ueber die Vertheilung der statischen Electricität in einem kreisförmig begrenzten Segment einer Kugelfläche.	58.	152 — 173

Lorenz zu Kopenhagen.

Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante.	58.	329 — 351

Lottner zu Lippstadt.

Zur Theorie des *Foucault*schen Pendelversuches.	52.	52 — 58
Ueber die der Einwirkung der Schwere entzogenen aber unter dem Einfluss der Erdbewegung rotirenden Körper. Theorie des *Foucault*schen Gyroscops.	54.	197 — 226

Luther zu Königsberg.

Ableitung der in dem Aufsatze „*Jacobi*, solution nouvelle etc., Bd. 53, p. 335 — 341“ vorkommenden Formeln.	53.	342 — 365

Emile Mathieu zu Paris.

Sur une formule relative à la théorie des nombres.	60.	351 — 356

Mehler zu Fraustadt.

Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fläche auf einen materiellen Punkt.	58.	240 — 248
Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale.	60.	321 — 342

Ménabréa zu Turin.

Exposition d'une théorie générale propre à exprimer les lois des divers ordres de phénomènes qui dépendent d'équations linéaires aux différences partielles, tels que ceux des vibrations et de la propagations de la chaleur.	54.	170 — 180

C. O. Meyer zu Königsberg.

Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten. . . .	56.	314 — 325

O. E. Meyer.

Ueber die Reibung der Flüssigkeiten.	59.	229 — 303

	Band	Seite
Minding zu Dorpat.		
Ueber die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werthe dienen.	55.	300—309
Möbius zu Leipzig.		
Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren.	52.	218—228
Ueber eine Methode um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. .	52.	229—242
Natani.		
Ueber totale und partielle Differentialgleichungen.	58.	301—328
C. Neumann zu Halle.		
De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur.	56.	46— 63
Zur Theorie der Elasticität.	57.	281—318
Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$.	59.	335—366
Oettinger zu Freiburg im Breisgau.		
Einige neue Sätze aus der Lehre von den Combinationen.	53.	322—334
Zwei Sätze über das grösste Product aus Zahlen von gegebener Summe.	57.	90— 92
Ueber die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus.	60.	375—376
Reiss zu Frankfurt am Main.		
Beiträge zur Theorie des Solitair-Spiels.	54.	344—380
Ueber eine *Steinersche* combinatorische Aufgabe, welche im 45sten Bande, Seite 181 gestellt worden ist.	56.	326—344
Riemann zu Göttingen.		
Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen.	54.	101—104
Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen.	54.	105—110
Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.	54.	111—114
Theorie der *Abel*schen Functionen.	54.	115—155
Röthig.		
Ueber einige Gattungen elliptischer Integrale.	56.	197—203
Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums. . .	58.	249—258
Sabinine zu Moskau.		
Démonstration d'une formule de M. *Ostrogradsky* relative au calcul des variations des intégrales multiples.	59.	185—189

Scheibner zu Leipzig.

	Band	Seite
Ueber das Flächenpotential.	54.	77 — 81

Schellbach.

Zur Theorie des Additionstheorems der elliptischen Integrale. . . .	54.	59 — 67
Ueber die Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche eines Ellipsoides.	54.	381 — 387

Schläffli zu Bern.

Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binairen quadratischen Formen bezieht.	57.	170 — 174

Schröter zu Breslau.

Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde.	54.	31 — 47
Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung.	56.	27 — 43
Ueber Modulargleichungen der elliptischen Functionen.	58.	378 — 379

Segnitz zu Eldena.

Beiträge zur Mechanik des Pfluges.	52.	152 — 174

Siebeck zu Liegnitz.

Ueber die graphische Darstellung imaginairer Functionen.	55.	221 — 253
Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.	57.	359 — 370
Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen (Fortsetzung).	59.	173 — 184

Spitzer zu Wien.

Integration der linearen Differentialgleichung: $(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$.	54.	280 — 282
Note über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. . .	57.	78 — 80
Ueber die Integration der Differentialgleichung $x^m\frac{d^ny}{dx^n}=\pm y$ durch bestimmte Integrale.	57.	82 — 87

Spottiswoode zu London.

Elementary Theorems relating to determinants.	51.	209 — 271
The same continued and ended.	51.	328 — 381
Sur quelques formules générales dans le calcul des opérations. . . .	59.	367 — 381

v. Staud zu Erlangen.

Ueber einige geometrische Sätze.	57.	88 — 89

Steichen zu Brüssel.

Examen de quelques difficultés de la mécanique physique.	51.	272 — 307
Suite du mémoire précédent.	51.	309 — 327

Steiner.

	Band	Seite
Ueber die Flächen dritten Grades.	53.	133—141
Ueber eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades). . .	53.	231—237
Vermischte Sätze und Aufgaben.	55.	356—378

Stern zu Göttingen.

Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche.	53.	1—102
Ueber eine zahlentheoretische Function.	55.	193—220
Ueber einige Eigenschaften der Function *Ex*.	59.	146—162

Tchebichev zu Petersburg.

Sur une formule d'Analyse.	53.	286

Ungenannt.

Zur Lebensgeschichte des Mathematikers *Ludwig Immanuel Magnus*. .	60.	379—381

Weierstrass.

Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.	51.	1— 60
Theorie der *Abel*schen Functionen.	52.	285—380

Weiler zu Manheim.

Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei, drei, vier und mehr Veränderlichen.	51.	105—207
Berichtigung zu Seite 199, Band 51.	51.	308
Eine Bemerkung über Integration linearer Differentialgleichungen. . .	55.	274—276

Weingarten.

Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen.	59.	382—393

Wöpke.

Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques.	53.	260—265
Propriétés d'un système de courbes algébriques ayant en commun un certain nombre de points.	54.	274—279
Propriétés de certains systèmes de surfaces du second ordre. . . .	54.	285—291

Zech zu Stuttgart.

Die Eigenschaften der Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle mittelst der höheren Geometrie abgeleitet.	52.	243—253
Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.	54.	72— 76
Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle, Zusatz zu dem Aufsatz Bd. 54.	55.	94.